موقف المنطق الحدسي من مبادئ المنطق التقليدي

هدي محمد غازي عشماوي حسنين
باحثة دكتوراه- قسم الدراسات الفلسفية
كلية الآداب- جامعة عين شمس
Huda.ghazy@art.asu.edu.eg

أ.د سهام النويهي
أستاذ المنطق وفلسفة العلوم
كلية البنات، جامعة عين شمس
s_alnoaihi2@yahoo.com

أ.د/ حسين على حسن
أستاذ المنطق وفلسفة العلوم
كلية الآداب، جامعة عين شمس
plato_48@yahoo.com

المستخلص:

يتناول هذا البحث موقف المنطق الحدسي من مبادئ المنطق التقليدي؛ وترجع أهمية هذا المنطق إلى كونه منطقًا مختلفًا عن المنطق التقليدي، حيث جاء معبرًا عن آراء الاتجاه الحدسي وأفكاره، الذي ظهر نتيجة البحث في مشكلة أسس الرياضيات، بوصفه محاولة لإنقاذ الرياضيات من التناقضات التي انطوت عليها. وقد تميز المنطق الحدسي برفضه أن يكون مبدأ الثالث المرفوع مبرهنة من مبرهنات النسق الحدسي، الأمر الذي يرجع إلى اختلاف مفهوم الصدق الرياضي بالنسبة للقضايا الرياضية، حيث يرفض أنصار المنطق الحدسي فكرة أن يكون الصدق أساسًا للمنطق، ويضعون بدلًا منها فكرة البرهان. ونتيجة لاستبدال مفهوم البرهان بمفهوم الصدق ظهر الاختلاف بشكل واضح بين المنطق التقليدي والمنطق الحدسي وخاصة فيما يتعلق بمفهومي النفي والنفي المزدوج، إذ إن النفي في المنطق التقليدي يستخدم لغة تعتمد على مفاهيم الصدق والكذب، في حين النفي الحدسي يستخدم لغة تعتمد على مفاهيم قابلية البرهان وقابلية التفنيد. كما ترجع إحدى نقاط الخلاف الرئيسة بين المنطق الحدسي والمنطق التقليدي إلى غياب قاعدة النفي المزدوج عند أنصار المنطق الحدسي.

الكلمات الدالة: المنطق الحدسي، المنطق التقليدي، مبدأ الثالث المرفوع، الصدق، البرهان، النفي .

مقدمة:-

ترجع نشأة المنطق الرمزي إلى منتصف القرن التاسع عشر، واستمر تقدمه في القرن العشرين لا بفضل جهود الفلاسفة، وإنما بفضل علماء الرياضيات، وذلك عندما قاموا بحركة نقد داخلي للبحث في أسس الرياضيات؛ بغرض التأكد من صحة عملياتهم الرياضية. أَكتشف الكثير من التناقضات في مجال العلوم الرياضية، ومن هنا أصبحت الرياضة في حاجة إلى أساس سليم تستند إليه، وإلى طريقة منهجية صحيحة تعتمد عليها في بحثها، ومن المعروف أن خاصية التناقض هي خاصية منطقية، ومن ثم فلكي تصبح الرياضيات خالية من التناقضات يجب أن تستند بالضرورة إلى المنطق.

وبناءً على ذلك ظهرت كثير من التطورات في مجالي المنطق والرياضيات، حيث اتجهت الدراسات نحو معرفة ما تنطوي عليه الرياضيات من أسس منطقية، وما ينطوي عليه المنطق من طرق وقوانين ومناهج استدلالية، ورغم ظهور مدارس فلسفية مختلفة ومتنوعة تبحث مسألة العلاقة بين المنطق والرياضيات، فإن الشيء المهم هو أن علماء الرياضيات أدركوا أن المنطق التقليدي لم يعد صالحاً للوفاء بما يصبون إليه من أهداف، فاتجهوا إلى البحث عن أنساق جديدة أكثر ملائمة وأشد دقة، فكان «**المنطق الحدسي**» Intuitionistic Logic أحد أهم هذه التطورات.

ظهر المنطق الحدسي نتيجة لظهور بعض الآراء الفلسفية التي تعمل على إعادة فحص الأسس التي تقوم عليها الرياضيات، والتي تُعْرَف باسم "الاتجاه الحدسي Intuitionism"، حيث أنه يُعَد رد فعل للاتجاه المنطقي [(1)] Logicism وللاتجاه الصوري [(2)] Formalism ، فضلًا عن أنه جاء بوصفه محاولة لإنقاذ الرياضيات من التناقضات التي انطوت عليها، إن الفكرة التي يستند إليها الاتجاه الحدسي هي أن الرياضيات قائمة على أساس الحدس Intuition[(3)]، وعلى ذلك فهي لا تفترض أساسًا لها أي علم آخر حتى ولو كان ذلك العلم هو المنطق، بل على العكس، لقد أنكر الحدسيون أن يكون المنطق قادرًا على تأسيس أصول الرياضيات، وإنما الحدس أو الإدراك الفوري المباشر هو الطريق لإدراك حقائق الرياضيات وأصولها وأسسها. (الخولي،2000م، ص251).

إن الاتجاه الحدسي له تاريخ طويل بخاصةٍ في مجال الرياضيات، ومن أنصاره رياضيون معاصرون أمثال جان براور Jan Brouwer (1881م-1966م)، والذي كان أرند هايتنج Arend Heyting (1898م—1980م) من أهم تلاميذه، وهيرمان فايل Hermann Weyl (1885م-1955م)، ويطلق براور اسم المدرسة "الحدسية الجديدة" New-Intuitionism على مدرسته وتلاميذه تمييزًا لهم عن الرياضيين الحدسيين السابقين من أمثال هنري بوانكاريه Henri Poincaré (1854م-1912م)، وإميل بوريل Émile Borel (1871م-1956م)، وهنري لوبيج Henri Lebesgue (1875م-1941م). (السرياقوسي، 1982م، ص 358).

ما يلاحظ على هذا الاتجاه الحدسي أنه قدم تصورًا مختلفًا لطبيعة العلاقة بين المنطق والرياضيات، حيث قام الحدسيون بوضع خطًا فاصلًا بين المنطق والرياضيات، وأشار براور بالقول إلى أن الاتجاهات التي بحثت في مشكلة أسس الرياضيات ترى أن المفارقات خلقت شكوكًا حول استخدام المنطق في الرياضيات، وبالتالي تخلى بعض الرياضيين عن فكرة أسبقية المنطق على الرياضيات، واختتم حديثه بقوله: إن جميع المفارقات تختفي إذا التزم المرء في التعامل مع الأنساق القابلة للبناء بشكل محدد على أساس الحدس (Franchella, 2018, P. 4)؛ وبذلك يعد التفكير الرياضي معتمدًا على الحدس الرياضي الأساسي، في حين يكون دور المنطق في نظرهم وسيلة لاحقة توفر لنا شرحًا للكشوف الحدسية الرياضية. ويصوغ هايتنج طبيعة هذه العلاقة، فيقول: "**إنَّ المنطق هو جزء من الرياضيات، وبالتالي لا**

يمكن بأي حال من الأحوال أن يكون بمنزلة أساس تستند إليه الرياضيات. كيف يكون ذلك جائزًا، وهو يحتاج إلى أساس، كما أن مبادءه أكثر تعقيدًا من مبادئ الرياضيات نفسها" (Heyting, 1971, P. 6)، أي: أن مبادئ المنطق أكثر غموضًا من مبادئ الرياضيات؛ لذلك حاول هايتنج تأسيس نوع جديد من المنطق مختلف عن منطق "البرنكيبيا" مستوحيًا ذلك من الرياضيات الحدسية فكان «**المنطق الحدسي**».

على الرغم من أن براور لم يسهم كثيرًا فيما يخص بناء نسق استنباطي للمنطق الحدسي، فإنه مهَّد الطريق أمام تلاميذه، وبخاصةٍ هايتنج، إذ أفاد هايتنج كثيرًا من أفكار براور في صياغة المنطق الحدسي، وقد جاء هايتنج عام 1930م بصياغة للحساب المنطقي لما يطلق عليه "المنطق الحدسي" بوصفه نسقًا استنباطيًّا.

وعلى ذلك يمكن القول: إن نقطة بداية المنطق الحدسي عند هايتنج ترجع إلى إسهامات براور، فقد كان براور أول من بدأ ينتقد استخدام المنطق التقليدي في الرياضيات، ولا سيما مبدأ الثالث المرفوع The Principle of the Excluded Middle بوصفه المصدر الأساسي للمفارقات، ذلك الأمر الذي أدى إلى رفض فكرة أن يكون الصدق أساس المنطق؛ وعلى ذلك اختلف مفهوم الصدق الرياضي بالنسبة لقضايا الرياضة. ومن هنا نتساءل: **ما طبيعة الصدق الرياضي Mathematical Truth؟ وعلى أي دليل يستندون في رفضهم أن يكون الصدق أساس المنطق؟ وهل يُعَدُّ المنطق الحدسي متسقًا عندما يرفض مبدأ الثالث المرفوع؟** هذا ما سنحاول أن نعرض له في الصفحات التالية؛ من خلال البحث في موقف المنطق الحدسي من مبادئ المنطق التقليدي.

أولًا- البرهان الحدسي في مقابل الصدق التقليدي:

إنَّ مفهوم البرهان بشكل عام يمثل الركيزة الأساسية بالنسبة للمنطق الحدسي؛ إذ يقوم اختلاف المنطق الحدسي عن المنطق التقليدي على تحديد مفهوم الصدق؛ وذلك لأن أنصار المنطق الحدسي قدموا مفهوم الصدق بطرق مختلفة جوهريًّا عن المنطق التقليدي. إن السمة المميزة للاتجاه الحدسي- تحديدًا- هي ضرورة تفسير مفهوم صدق القضية من حيث مفهوم البرهان Proof .

عندما يفكر المرء في الاتجاه الحدسي فإنه من الطبيعي أن نبدأ بـــبراور؛ الأب المؤسس للاتجاه الحدسي؛ لذا **ما رأي براور في الصدق** ؟ إن الإجابة عن هذا التساؤل ليست واضحة تمامًا. وخاصةً إذا لم يكن لديه اهتمام كبير بالمنطق الرياضي، الذي عَدَّه تابعًا للرياضيات، بل كان يُعِدُّهُ مجرد وصف للدقة الموجودة في الممارسة الرياضية, وربما لهذا السبب لم يرَ ضرورة تقديم شرح دقيق لهذه المفاهيم، ولكن يمكن تتبع مفهومه "الثوري" للثوابت المنطقية في استخدمه لها في برهانه على النظريات الحدسية، وفي التعليقات المصاحبة لتلك البراهين.

يمكن أن نقتبس بعضًا من آراء براور حول الصدق، ففي إحدى مقالته يقول: **"الصدق هو فقط في الواقع؛ أي: في تجارب الوعي الحالية والماضية ... التجارب المتوقعة والخبرات المنسوبة للآخرين صادقة فقط كتوقعات وفرضيات، ولكن في محتوياتها لا يوجد صدق"**. (Brouwer, 1975, P. 488).

على ذلك، فإنَّ أي قضية ولتكن "a" إذا لم يُبَتّ فيها؛ أي: أنها ليست صادقة ولا كاذبة، فإن هذا لا يمنع أن تصبح صادقة أو كاذبة؛ وبذلك فإن هذه المفاهيم الزمنية للصدق الرياضي - في رأي براور- هي المفاهيم الوحيدة المقبولة. (Dummett, 2000, P. 12).

يبدو أن العديد من آراء براور عن الصدق تلزمها الواقعية، التي بموجبها تجعل الصدق زمنيًّا بشكل كبير، وتصبح القضية صادقة فقط عندما تُثْبَتْ؛ أي: لا يوجد صدق ما لم يُخْتَبَرْ بالفعل. في موضعًا آخر يؤكد براور ذلك بقوله: **"... في الرياضيات لا يوجد صدق مُعترف به ما لم يُخْتَبَرْ"**.(Brouwer, 1975,

P. 552). بتعبير آخر يعتقد براور أن القضية صادقة فقط إذا أُثْبِتَتْ بالفعل؛ أي: وجود برهان على هذه القضية، ولا يوجد موضوع إلَّا إذا بُنِيَ بالفعل.

إذن يرتبط مفهوم البرهان الحدسي بفكرة التحقق والإثبات. فقد أظن أن الحساء يغلي ثم أذهب إلى الموقد، وأرى أنه كذلك. وبهذا المعنى، قد أؤكد اعتقادي أن الحساء يغلي، لكن رؤيتي أو سماعي أو حتى لمس الحساء، لا يثبت أن هذا الحساء كما هو في الواقع. بعبارة أخرى، قد أقارن فكري بالحساء كما أتصور، ولكنني لم أكن أحسبه أبدًا كما هو في حد ذاته، ولكن إذا لم يكن من الممكن معرفة العلاقة بين أفكاري والواقع نفسه، فعندئذ لا يمكن أبدًا معرفة الصدق. (Nolt, 1997, PP. 427, 428).

إنَّ تصوري للحساء على ذلك هو شكل من أشكال البراهين التي يمكن إثباتها، أو إثبات الفكرة بأن الحساء يغلي. وهكذا فإنَّ الفكرة، التي أختبرها تُقارن بالبراهين التي أختبرها أيضًا.

يمكن القول: إنَّ آراء براور حول الصدق متأرجحة - بطريقة محيرة نوعًا ما - بين الواقعية والإمكانية؛ أي: بين فكرة أن الصدق مساوٍ للوجود الفعلي للبرهان، وفكرة أن الصدق يتكون من مجرد إمكانية بناء البرهان. ربما كان هذا هو مصدر الغموض والارتباك في الاتجاه الحدسي منذ ذلك الحين. (Raatikainen, 2004, P. 134).

لذلك يمكن تفسير عبارة "يوجد برهان على القضية" أو "لدينا برهان على ذلك" بطريقتين مختلفتين؛ أولاً- يمكن أن نعني أننا أثبتنا بالفعل القضية. ثانيًا- لا يمكن فهمها إلَّا على أنَّه سيكون بإمكاننا إثبات هذه القضية، لقد سَمَّى هذان التفسيران بالرؤية الواقعية Actualist View والرؤية الممكنة Possibilist View على التوالي. (Raatikainen, 2013, P. 2).

إن أنصار المنطق الحدسي يرفضون النظر إلى فكرة الصدق بوصفها أساسًا للمنطق، ويضعون بدلًا منها فكرة البرهان. نحن لا نستطيع أن نقرر بالنسبة لقضية معينة ما إذا كانت صادقة أو كاذبة إلا بعد وجود برهان على صدقها أو كذبها، فنظرية البرهان عند الحدسيين تسبق نظرية الصدق، وهذا على العكس تمامًا مما يذهب إليه أصحاب المنطق التقليدي. (أبو النور، 1993، ص ص 291، 292) .

إذا كان الافتراض الأساسي للرياضيات التقليدية هو أننا نضفي على القضايا الرياضية معنى يجعلها صادقة أو كاذبة بشكل قاطع، بعيدًا عن الوسائل المتاحة لنا لإدراك قيم صدقها، فإن مثل هذا المفهوم الخاص بصدق القضايا الرياضية- من وجهة نظر حدسية- يعد وهمًا؛ وذلك لأن فهم القضية الرياضية فيما يرى أنصار المنطق الحدسي يَكْمُنُ في القدرة على وجود برهان لها، وتُعَدُّ هذه القضية صادقة في حالة وجود مثل هذا البرهان. (Dummett, 2000, P. 3-4).

يجب أنْ نلاحظ هنا أنَّ أنصار المنطق الحدسي لم يلغوا فكرة الصدق والكذب للقضايا في حد ذاتها، ولكنهم يلغون افتراضها، ويحاولون بدلًا من هذا الافتراض أن يكون لديهم الدليل والبرهان على الصدق من عدمه. (عبد العزيز، 2013، ص 7).

لكن، **ما رأي هايتنج في مفهوم الصدق؟** على الرغم من أنه وضع نسقًا صوريًا للمنطق الحدسي فإنه لم يقل الكثير عن مفهوم الصدق. ولكن في نهاية الأمر عَبَّرَ عن رأيه فيما يتعلق بمفهوم الصدق بقوله: **"إنَّ مسألة معرفة أين يمكن العثور على "الصدق" ليست مسألة رياضية"**. (Heyting, 1998, P. 309). مضافًا إلى ذلك قوله: **"ليس من سمات الفكر الرياضي الاهتمام ببلوغ صدق العالم الخارجي، وإنما الاهتمام فقط بالبناءات العقلية"**. (Heyting, 1971, PP. 8, 9).

لكن تلك الآراء لا تعني أن هايتنج كان متفرجًا بشأن الاختيار بين الرؤية الواقعية والرؤية الممكنة، ففي عام 1930م هاجم الفكرة التقليدية القائلة بـــ " p قضية صادقة". واستمرارًا لذلك، انتقد استبدال القضية "p صادقة" بالقضية "p قابلة للإثبات". لا يستطيع أحد أن ينكر رأي هايتنج بقوله إن "p قابلة

للإثبات" تكافئ "وجود برهان لــ p"، ولكن بدلًا من ذلك، يجب على المرء استبدال الفكرة التقليدية بعبارة "معرفة كيف يثبت p". ومن هنا، على الرغم من أن هايتنج يفضل تجنب فكرة الصدق، فإنَّه من الواضح أنَّه يرفض هنا الرؤية الممكنة لصالح الرؤية الواقعية. (Raatikainen, 2004, P. 134). مرة أخرى، كتب في عام 1958م يقول: **"ببساطة لا يمكننا التحدث عن قيمة الصدق لقضية لم يُثبت صدقها أو كذبها"**.(Heyting, 1958, P. 109). ومن هنا من الممكن أن نستنتج أن هايتنج يميل نحو الرؤية الواقعية.

يرى هايتنج ضرورة التمييز بين القضية Proposition والتقرير[4] Assertion، ويُعَبَّرُ عن ذلك بقوله: **"إن التقرير هو إثبات القضية، والقضية الرياضية تُعَبَّرُ عن مشكلة أو الأفضل من ذلك تُعَبَّرُ عن توقع معين. على سبيل المثال، القضية " c عدد نسبي"، تُعَبَّرُ القضية عن توقع أنَنَّا يمكن أن نجد عددين صحيحين a وb، بحيث إن c = a / b. ولعل مصطلح "الهدف"[5] Intention، يُعَبَّرُ بشكل أفضل عن المقصود هنا ونستخدم مصطلح "القضية" للهدف الذي تُعَبَّرُ عنها لغويًا من خلال الأسس الحدسية للقضية الرياضية. إنَّ الهدف لا يشير فقط إلى حالة يُعتقد أنها موجودة بشكل مستقل عنا، ولكن أيضًا إلى تجربة يُعتقد أنَّها ممكنة، كما يوضح المثال السابق بوضوح؛ وعلى ذلك فإنَّ إثبات القضية يعني تحقيق الهدف"**. (Heyting, 1983, P. 58, 59).

يتضح من خلال ذلك أنَّ هايتنج يستخدم التقرير بمعناها الرياضي، الذي يعني ببساطة الإثبات الفعلي للقضية؛ أي: تحقيق الهدف الذي تُعَبَّرُ عنه القضية. إذا كانت القضية تعبر عن احتمال أنه يمكن إيجاد عددين صحيحين a وb، فإن التقرير هو تأكيد هذه القضية؛ أي: أن الاحتمال قد أُثبت؛ أي: تقرير أن "c عدد نسبي"، بمعنى أنه بُنِيَ a وb بالفعل.

يستطرد هايتنج بقوله: **"إن التقرير هو ملاحظة لواقعة تجريبية؛ أي: تحقيق التوقع الذي تُعَبَّرُ عنه القضية p. أما التقرير في المنطق التقليدي، فيعنى أنَّ p صادقة؛ أي: أنه يشير إلى واقعة تتجاوز الطبيعة، وهذا ما لا يتوافق مع الأفكار الحدسية"**. (Heyting, 1998, P. 307).

لكن دعنا نلاحظ أن التقرير في المنطق التقليدي كما في المنطق الحدسي لا يُعَدُّ قضية، وإنَّما هو إثبات الهدف المعرب عنه في القضية أن يتحقق، بمعنى إذا كان هايتنج استخدم مصطلح التوقع للتعبير عن القضية، فإن ما يجعل التوقع أو الهدف صادقًا هو تحقيقه، وهو ما يُثْبَتُ في التقرير.

أما المقصود بتقرير القضية عند براور، فيعبر هايتنج عن ذلك بقوله: **"إنَّ تقرير براور للقضية p، يعني من المعروف كيف يمكن إثبات p، سنشير إلى ذلك بواسطة p ├ ، والمقصود بــ "الإثبات" هنا "الإثبات من خلال البناء"**.(Heyting, 1998, P. 307).

لكن لا يمكن تفسير تقرير القضية الرياضية على أنه إدعاء على وجود برهان له فقط، ولكن بوصفه إدعاء بأنَّ لديها وسائل فعَّالة، من حيث المبدأ؛ للحصول على البرهان (Dummett, 2000, P.13)؛ وعلى ذلك فإنَّ التقرير الرياضي يؤكد حقيقة وجود بناءٍ رياضي معين قد تَحَقَّقَ.

إن النقطة الجوهرية للاتجاه الحدسي هي رفض النظر إلى القضية بوصفها صادقة إلَّا إذا كانت هناك طريقة لتقرير أنها كاذبة والعكس صحيح، أو بعبارة أخرى لا يمكننا النظر إلى القضية بوصفها صادقة أو كاذبة إلَّا إذا كانت هناك طريقة معينة لتقرير أنها صادقة أو كاذبة. (محمد مهران، 2007م، ص 581).

إذا كان هايتنج قد قدم بعضًا من التساؤلات الفلسفية الخاصة بالمنطق، مثل **ما القضية؟ كيف تكون القضية صادقة؟ هل هناك تتطابق بين القضية الصادقة والجملة التي تُعَبَّرُ عنها؟** إذا كان الأمر كذلك، **فما العلاقة بين القضية والجملة؟** إذا كانت القضية هي الجملة نفسها، **فكيف يمكن التمييز بينهما؟** يرى

هايتنج أن هذه التساؤلات قد حُلَّتْ بمائة طريقة مختلفة، إلَّا أنه لا واحد من هذه الحلول مقتنع بها تمامًا، فكلها توضح أن المنطق – في رأي هايتنج- معقد وبالتالي من غير المناسب النظر إليه بوصفه أساسًا للرياضيات.(Heyting, 1974, P. 79).

إنَّ المنطق على ذلك لا يكفي وحده لعرض المسائل والقضايا الرياضية، وكون الرياضيات نابعة من الحدس، فهي لا تفترض وجود نسق منطقي، وإنما هي مصدر للمبادئ المنطقية، بعد أن يُثبت صحتها من خلال الحدس الصائب Appropriate Intuition (Kneal & Kneal, 1962, P. 675)؛ لذلك تعتمد الأفكار الرياضية والطرق البرهانية على الحدس، ومن هنا ارتبطت فكرة صحة البرهان بالحدس الرياضي.

ويُعَبِّرُ هايتج عن ذلك بقوله:" **كانت إحدى أطروحات براور الرئيسة أن الرياضيات لا تعتمد على المنطق، بل العكس تمامًا المنطق يعتمد على الرياضيات، يمكن النظر إلى هذا بسهولة على أنه نتيجة مباشرة لنقطة انطلاقه. إذا كانت الرياضيات تتكون من بناءات عقلية، فإن كل نظرية رياضية هي نتيجة مستخلصة من بناء ناجح، وتتكون خطوات البناء الرياضي من برهان نظرية هذا البناء نفسه؛ وبالتالي، تُعَدُّ خطوات البرهان هي نفسها خطوات البناء الرياضي".** (Heyting, 1958, PP. 106, 107).

لكن مثل هذا البرهان لا يمكن أن يكون برهانًا صوريًا، وإنَّما هو برهان مقبول حدسيًّا، بمعنى أن يكون نوعًا محددًا من البناء العقلي. (Dummett, 2000, P. 5) . ومن هنا تأتي الفرضية الأساسية التي يرددها أنصار المنطق الحدسي؛ وهي أن القضية الرياضية لا تصدق إلا إذا بُرْهِنْ عليها بنائيًّا؛ أي: أن "p" قضية صادقة = وجود برهان على "p". (Marion, 1998, PP. 147, 148).

يُعَبِّرُ عن ذلك هايتنج بقوله: " **تتطلب القضية الرياضية "p" دائمًا بناءًا رياضيًا بخصائص معينة، يمكن من خلالها تقريرها، وبمجرد تحقيق مثل هذا البناء، نستطيع القول إن هذا البناء أثبت القضية "p" ونطلق عليها برهان "p"** " (Heyting, 1971, P. 102).

لذا؛ من أهم شروط البرهان أن يكون برهانًا بنائيًّا، ولكن **ما المقصود بالبرهان البنائي؟ كيف نستطيع معرفة أنَّ هذا البرهان هو برهان بنائي لقضية ما؟** في عام 1930م قدم هايتنج في مقالته **"عن المنطق الحدسي"** ما يعرف باسم "قابلية البرهان" Provability محاولًا الإجابة عن هذه التساؤلات بقوله: "**إنَّ برهان القضية "p" عبارة عن بناء رياضي، وتوقع أن تكون قادرًا على بناء مثل هذا البرهان؛ يؤدي إلى تكوين قضية جديدة سنشير إليها بـــ "p +"، وتُقرأ على النحو الآتي: "p" قابلة للبرهان. وعلى الرغم من أن الصيغة "p + ├ " لها المعنى نفسه الخاص بـ" p ├ "، فإن "p" لا تتطابق و"p +". ولتوضيح ذلك، دعونا نفكر في القضية القائلة "كل عدد زوجي هو مجموع عددين أوليين"، و"p" تعني ببساطة أنه عند أخذ عدد زوجي بشكل عشوائي، من المتوقع أن يكون قادرًا على العثور على عددين أوليين هما المجموع، ولكن يُحدد هذا الاحتمال بعدد محدود من المحاولات، أما "p +" فعلى العكس من ذلك، فإنها تتطلب بناء يقدم لنا برهانًا على جميع الأعداد الزوجية في الوقت نفسه".** (Heyting, 1998, P. 308).

من خلال ذلك، يتضح لنا أنَّ من أهم شروط البرهان البنائي هو أنه لا تُقْبَلُ أية قضية في الرياضيات إلَّا إذا كان يمكن إثباتها (Kneal & Kneal, 1962, P. 675). ويوضح لنا هايتنج وجود اختلاف بين "p" و"p+"، إذ يُعَدُّ الرمز "+" تعبيرًا عن دالة منطقية؛ بمعنى قابلية البرهان. ومن خلال المثال المذكور أعلاه، ويتضح الفرق بينهما على أساس أنه لا يمكن أن نُبرهن على قضية "كل عدد زوجي هو

مجموع عددين أوليين" إلَّا من خلال البرهنة على جميع الأعداد الطبيعية الزوجية، التي تؤكد أن مجموع كل عددين أوليين يمثل عددًا زوجيًا. ومن هنا يتضح أنه لا يمكن إثبات "p" دون إثبات "p+".

يمكن إعطاء تفسير مناسب لنظرية البرهان من خلال مفهوم الصدق ومبدأ الثنائية The Principle of Bivalence؛ هذا لأنَّ المنطق التقليدي يُسلم بمبدأ الثنائية؛ أي: أن كل قضية إما أن تكون صادقة أو كاذبة؛ لذا يعتمد التفسير التقليدي للروابط المنطقية Logical Connectives المعطاة من خلال قوائم الصدق، على افتراض أن كل قضية إما أن تكون صادقة أو كاذبة، سواء كان بإمكاننا معرفة ذلك أم لا. إلَّا أنَّ هذا الافتراض يعترض عليه الحدسيون، إذ يُفترض ضمنيًّا وجود حقيقة مستقلة عن العقل للموضوعات الرياضية. ومع ذلك، فإن هذا الافتراض، وفقًا للحدسيين، هو افتراض ميتافيزيقي لا يسلمون به. وفي المقابل يفضل أنصار المنطق الحدسي شرح الصدق من حيث البرهان (Raatikainen, 2013, P. 2).

الآن إذا لم نكن قادرين أن نحكم بالصدق أو بالكذب على القضايا الرياضية، فلا ينبغي أن نُفَسَّرَ "الثوابت المنطقية" Logical Constants من خلال شروط الصدق والكذب لروابط الثوابت المنطقية، ما دام أنَّ الثابت المنطقي ينبغي أن يُفسر بالشروط التي يُعَدُّ من خلالها البناء الرياضي برهانًا مقبولًا من الناحية الحدسية لروابط هذه الثوابت. وباختصار يتم تحديد معنى الثوابت المنطقية ليس عن طريق شروط الصدق والكذب، وإنَّما عن طريق شروط التقرير. وبما أن هايتنج أكد أن تقرير القضية هو تعبير عن إثبات فعلي؛ أي: البناءات، إذن يتم البحث عن شروط التقرير على أساس قابلية البرهنة للبناءات التي تتضمن ذلك الثابت. (Franchella, 1994, P. 156). عندئذٍ تُعَدُّ القضية صادقة فقط إذا وُجد برهان على ذلك، ويمكن أن تكون القضية كاذبة إذا كانت غير قابلة للبرهنة؛ أي: تفنيدها بشكل واضح. وبَنِاءً على ذلك، سيكون من الصعب الحكم على بعض القضايا الرياضية جيدة التكوين Well-Formed بالصدق أو الكذب. (McCarty, 2006, P. 90).

وعلى الرغم من أن براور كان مدركًا ضرورة تفسير الثوابت المنطقية في ضوء نظرية البرهان، فإنه لم يدرس جميع الثوابت المنطقية بطريقة منهجية، وإنَّما أعاد تفسيرها فقط عندما قابلهم في سياقات مختلفة من مناقشته للقوانين المنطقية، فقد ظلت مهمة إعادة تفسير جميع الثوابت المنطقية مفتوحة إلى أن صيغت بشكل أدق من خلال هايتنج.

قد سُمِّي التفسير الحدسي للثوابت المنطقية بـ (BHK) نسبة إلى أقطاب المنطق الحدسي " براور Brouwer- هايتنج Heyting- كولموجوروف Kolmogorov " (1903-1987). ويختلف التفسير الحدسي للثوابت المنطقية عن التفسير التقليدي لها، فإذا كان المنطق التقليدي يشير إلى أن قيمة صدق القضية متوقف على قيم صدق عناصرها، فإن القضية الانفصالية(6) Disjunction (ق ∨ ل) صادقة في حالة صدق "ق" أو "ل" أو صدقهما معًا، أما قضية العطف (7) Conjunction (ق . ل) فصادقة في حالة صدق المعطوفين معًا ويكذب في باقية الحالات الأخرى. (علي، 2003، ص ص 53- 55)، وبالنسبة لقضية اللزوم (8) Implication (ق ⊂ ل) تكون صادقة في جميع الحالات، ماعدا حالة صدق المقدم وكذب التالي (علي، 2003، ص 65).

وبالنسبة للتفسير الحدسي للثوابت المنطقية في ضوء نظرية البرهان، نجد فيما يتعلق برابطة العطف، التي تكتب بالرموز هكذا: ($a \wedge b$)، فإنَّها عبارة عن زوجين من البراهين (a، b)، ويُعد العطف مبرهنًا في حالة وجود برهان لـ "a" وبرهان لـ "b"، أما رابطة الفصل التي تكتب بالصورة التقليدية ($a \vee b$)، فإنها عبارة عن زوجين من البراهين (a، b)، ويُعد الفصل مبرهنًا في حالة وجود برهان لـ "a" أو برهان لـ "b"، أما بالنسبة إلى اللزوم، الذي عُبِّرَ عنه باستخدام "→" بدلًا من "⊂"، بحيث يكون

$(a \rightarrow b)$ بمعنى أنه مبرهن في حالة إذا بُرهن على"b" من "a" المبرهن عليه سابقًا. (Dalen, & Atten, 2006, P. 514).

النتيجة الطبيعية لنظرية الصدق الخاصة بالقضايا الرياضية وغير الرياضية - على حد سواء- هي أن القضايا التي لا تحتوي على شروط التقرير لا تُعَدُّ قضايا؛ وبالتالي أصبحت شروط التقرير شروطًا للصدق. (Benacerraf, & Putnam, 1983. PP. 24, 25).

إن مفهوم الصدق التقليدي بشكل عام يُعوض بمفهوم البرهان أو الدليل؛ إذ يُستبدل مفهوم الصدق بمفهوم البرهان. وهكذا، فالقضية الصادقة عند الحدسيين هي القضية المبرهنة، والقضية الكاذبة هي القضية القابلة للتفنيد. (الجنابي، 2010م، ص 118).

في نهاية الأمر، من الممكن ذكر إجابة هايتنج عن تساؤله حول **"ما إذا كان يمكن تحقيق الدقة المطلقة واليقين المطلق في الرياضيات الحدسية"**، وكانت إجابته: **"أن اليقين المطلق للفكر الإنساني أمر مستحيل، وبالتالي، فهو لا معنى له"**. (Heyting, 1958, P. 103). وبرغم ذلك، فأنَّه أدرك لاحقًا، وجود درجات من الأدلة Degrees of Evidences تُعَدُّ معيارًا للصدق بوصفها يقينًا قاطعًا؛ وذلك لأنَّه أدرك أن البراهين ليست ثابتة إلى الأبد، وربما يكون هذا أحد أسباب رفض الاتجاه الحدسي كاتجاه أساسي في الرياضيات. وهذا دليل على عد البرهان قابلًا للمراجعة، وليس معيارًا مناسبًا للصدق. (Franchella, 2007, P. 12).

باختصار، ليس من السهل تمامًا تكوين صورة متماسكة للمفهوم الحدسي للصدق على أساس الحدس، حيث يتطلب المنطق الحدسي بالضرورة فكرة أكثر عن وجود البرهان. بدلًا من الإثبات الفعلي للبرهنة على القضية "a"، بحيث يجب على المرء التركيز على إمكانية البرهنة على "a" من حيث المبدأ؛ لذلك فضلت الغالبية العظمى من الحدسيين الرؤية الممكنة، التي تحدد الصدق بالإثبات من حيث المبدأ، ويهدف هذا التفسير إلى جعل الصدق غير زمني وثابت، وبالتالي، أكثر ملائمة كأساس للمنطق الحدسي. (Raatikainen, 2013, P. 10).

لكن بقدر ما يُسلم بوجود البراهين بوصفها أساسًا جزئيًا للصدق في رأي براور، إلَّا أنه يجب أن يكون مع فهم دقيق لما هي البراهين، حيث لا يمكن فهمها على أنها كيانات لغوية Linguistic Entities ولا يمكن حتى أن تكون شيئًا "مبنيًا" على المنطق؛ وذلك لأنَّه وفقًا لآراء براور تُعد الرياضيات قبلية ومستقلة عن اللغة والمنطق (Hansen, 2015, P. 5). وإذا كنا قد تعرفنا موقف الاتجاه الحدسي من العلاقة بين المنطق والرياضيات وأسباب الاعتراض على كونه أساسًا يمكن أن تقوم عليه الرياضيات، فقد حان الوقت لعرض موقف أصحاب الاتجاه الحدسي- براور وهايتنج - من مبدأ الثالث المرفوع وأسباب اعتراضهم عليه.

ثانيًا- نقد المنطق الحدسي لمبدأ الثالث المرفوع:

في نطاق اتجاه براور الحدسي، تسأل حول ما إذا كان من بين مختلف البناءات اللغوية الدقيقة المصاحبة للبناءات الرياضية، التي تظهر من خلال قوانين المنطق التي تعمل على شرحها. متسائلًا، **"هل سيقوم علماء الرياضيات، أثناء البحث في الإثباتات الخاصة بهم، بتدوين بنائهم باستخدام الرموز اللغوية للمبادئ المنطقية في جميع عملياتهم الحسابية الرياضية؟ "**. (Brouwer, 1975, P. 443).

يبدأ براور إجابته عن هذا السؤال بمقدمة أساسية؛ وهي أن مبادئ المنطق تظهر بوصفها نتيجة لاستخدام اللغة التي تُعَبِّر عن التفكير الحدسي، ولكن لتوضيح العلاقة التي يفترض براور أن يربطها بين المنطق والرياضيات، سنبدأ بفكرة مرفوضة، وهي القول بأنه في هذه القضايا المتعلقة بالبناءات الرياضية، يلجأ علماء الرياضيات إلى اللغة التي تحتوي على تعبيرات، مثل: "إذا... إذن"، "و"، "أو"،

"لا "،"كل"، التي تشير إلى ما نسميه اليوم بالروابط المنطقية والأسوار. من وجهة نظره، سيكون من الأفضل لو تمكن علماء الرياضيات من التواصل دون استخدام مثل هذه التعبيرات. (Placek, 1999. (PP. 62, 63.

وعلى ذلك، قام براور في أطروحته برفض تطبيق المبادئ المنطقية كروابط بنائية، حيث يرى أنه نتج عن تطبيقها "بناءات لغوية" لا علاقة لها بالرياضيات، تلك البناءات تبدأ من رموز لا معنى لها، وبالتالي تفتقر إلى الوجود الرياضي الذي أشار إليه براور على أنه البناء العقلي القائم على أساس الحدس وحده. (Stigt, 1990, PP. 233, 234).

من هنا، تحولت القضية من التساؤل حول الوجود الرياضي إلى التساؤل حول صحة المبادئ التقليدية وطبيعة تحصيل الحاصل التي تتميز بها مبادئ المنطق. وتعد هذه دعوةً من براور لإمكانية وجود مبادئ منطقية غير جديرة بالثقة بها؛ لذا من المهم إلقاء نظرة على صياغة براور الخاصة بهذه المشكلة، وخاصةً أنَّ نقده للمنطق التقليدي يقوم على ما يأتي(Dalen, 2002, P. 3):

أولًا- إلقاء اللوم على أصحاب الاتجاه المنطقي لإعطاء الأولوية للمنطق على الرياضيات.

ثانيًا- لتوضيح أن المنطق غير جدير بالثقة به، وخاصَّة مبدأ الثالث المرفوع، بوصفه غير صحيح وغير مُبرر.

نتيجة لرفض أنصار المنطق الحدسي المفهوم التقليدي للصدق، ترتب علي ذلك التخلي عن بعض المبادئ الأساسية للمنطق؛ فنظرًا لتفسير الصدق على أنَّه "ما بُرْهِنَ عليه"، فإنَّ مبدأ الثالث المرفوع يُعد تحريفًا واضحًا لمفهوم الصدق؛ لأننا لا نستطيع أن نضمن أننا نتمكن من العثور على دليل أو برهان لقضية معينة، فلا يحق لنا أن نفترض أن كل قضية إمَّا أن تكون صادقة أو كاذبة.

وعلى ذلك من الضروري معرفة رأي المنطق الحدسي في المبادئ المنطقية التقليدية، وخاصةً مبدأ الثالث المرفوع، وأسباب انتقاداهم لهذا المبدأ. **وهل هذا الانتقاد ينطبق على كل المبادئ المنطقية التقليدية أم على مبدأ الثالث المرفوع فقط؟**

من تعريفات المنطق أنَّه "علم قوانين الفكر" Laws of Thought أو العلم الذي يحاول الكشف عن المبادئ التي يسير عليها الفكر الإنساني، وقد حصر أرسطو Aristotle (384 ق.م -322 ق.م) هذه المبادئ في ثلاثة، وهي: مبدأ الهوية Principle of Identity، ويُعَبَّرُ عنه بتعبيرات عدة أهمها: "أ" هو "أ"، "أ = أ"، الشيء هو نفسه..إلخ، ومبدأ التناقضPrinciple of Contradiction وله تعبيرات عدة، أهمها: "أ" لا يمكن أن يكون "أ" و"لا- أ" في الوقت نفسه، ومبدأ الثالث المرفوع الذي يمثل الصورة النهائية لقوانين الفكر، وأهم صيغه: "أ" إمَّا أن يكون "أ" أو "لا- أ" ولا وسط بينهما، فالحكم إما أن يكون صادقًا أو كاذبًا ولا شيء أكثر من ذلك. (علي، 2015، ص ص 47- 48).

لقد تعرضت تلك المبادئ لانتقادات كثيرة من اتجاهات مختلفة، وخاصةً مبدأ الثالث المرفوع الذي يُعد أكثر المبادئ مثارًا للخلاف والنزاع بين المناطقة وعلماء الرياضيات، فنجد أنصار المنطق الحدسي يعترضون على المبادئ المنطقية التقليدية، من خلال مبدأ الثالث المرفوع، إذ يُعَدُّ أمرًا مشكوكًا في صحته من منظور حدسي. ويمكن تسجيل أول اعتراض عليه من خلال تفسير المنطق الحدسي لمفهوم الصدق، الذي تُرجم إلى مفهوم قابلية البرهان. ويُعَبِّرُ هايتنج عن ذلك متسائلًا: "**هل يمكن أن ينطبق على مبدأ الثالث المرفوع ($a \vee \neg a$)** (9) **هذه التفسيرات الخاصة بنظرية البرهان، مع العلم أنه عندما نؤكد ذلك، فهذا يعني أنَّ بالنسبة لأي قضية ولتكن "a" يمكننا إما أن نثبت "a" أو نستنتج تناقضًا من البرهان المفترض لـــ "a". من الواضح أننا لسنا قادرين على القيام بذلك بالنسبة لكل قضية "a"؛ لذلك لا**

يمكن إثبات مبدأ الثالث المرفوع. إذا لم نكن نعرف ما إذا كانت "a" صادقة أم لا، فمن الأفضل ألا نقرر ذلك". (Heyting, 1974, P. 87).

من الواضح أن سبب رفض هايتنج لمبدأ الثالث المرفوع يرجع إلى اختلاف معنى الانفصال الحدسي، الذي يعني- كما عَبَّرَ عنه هايتنج- بقوله: " **تشير الصيغة (p∨q) إلى ذلك الهدف الذي يتحقق فقط إذا تحقق واحد على الأقل من هذه الأهداف "p" و"q". وعلى ذلك تصبح الصيغة الخاصة بمبدأ الثالث المرفوع (p ∨ ¬ p ├)، التي تعني إمكان تأكيد القضية "p" فقط في حالة إما أن نثبت "p" أو نستنتج تناقضًا من برهان "p"؛ وبالتالي فإنَّ البرهان على أنَّ مبدأ الثالث المرفوع مبدأ عام يجب أن يحتوي على طريقة يمكن من خلالها- عند وجود قضية- أن يثبت دائمًا إما القضية نفسها أو يثبت نفيها**". (Heyting, 1983, P. 59)؛ أي: إثبات وجود برهان لـ "p" أو إثبات وجود برهان لـــ "¬p"، بغض النظر عما إذا كان بإمكاننا إثبات ذلك أم لا.

كل هذا يؤكد لنا أنه لا يمكن أن يستمر مبدأ الثالث المرفوع في النسق المنطقي الحدسي عند هايتنج؛ لأنَّ وجوده يعني إمكانية البت في جميع القضايا، ومن هنا اتَّضح بطلان هذا المبدأ؛ لأنَّه عندما اسُتبدل مفهوم "الصدق" بمفهوم "قابلية البرهان"، تَبَيَّنَ لنا عدم وجود برهان لبعض القضايا، ولكن هايتنج لم يوضح رأيه من خلال تقديم بعض الأمثلة المضادة الصريحة لمبدأ الثالث المرفوع كما فعل براور، الذي قَدَّمَ العديد من الأمثلة المضادة التي استخدامها بوصفها أسباب قوية على رفضه لمبدأ الثالث المرفوع.

لكن لا بُدَّ من توضيح الخلفية التي على آثرها تبين رفض براور لمبدأ الثالث المرفوع. فقد أعطى- منذ بداية مسيرته - مكانة للنشاط الرياضي العقلي، وقَلَّلَ من دور اللغة والمنطق في الرياضيات. فقد قام بمعارضة استخدام المبادئ المنطقية أو قواعد الاستدلال كوسيلة لتنفيذ البناءات الرياضية، فكان يَنظر إلى المبادئ المنطقية على أنَّها مجرد صرح لغوي بصرف النظر عن الرياضيات سواء كانت صحيحة أم لا. (Zach & Badesa, 2010, P. 101). كما كان يعتقد أنَّ مبادئ المنطق التقليدي، التي جاءت إلينا بشكل أساسي من أرسطو، لها صحة مطلقة؛ وبالتالي فإنَّها قابلة للتطبيق على كل أشكال التفكير بغض النظر عن الموضوع، وذلك على عكس تصور الاتجاه الحدسي للمنطق، الذي تعده ثانويًّا بالنسبة للرياضيات. (Kleene, 1971. P. 46)؛ لذا حاول في أطروحته إظهار أنَّ الرياضيات مستقلة عن ما يُسَمَّى " قوانين المنطق" أو "قوانين الفكر الإنساني". (Brouwer, 1975, P. 72).

كل هذا يوضح لنا أنَّ معارضة براور لاستخدام المبادئ المنطقية تأتي من كرهه العام للمنطق، إذ تُعَدُّ هذه المبادئ هجوم على فكرة أرسطو عن المنطق على أنَّه "الأرجانون" Organon؛ أي: الآلة الكلية في اكتشاف الحقائق الجديدة؛ وبالتالي استنكر هذه المبادئ المنطقية بوصفها غير مناسبة بشكل خاص وغير جديرة بالثقة (Stigt, 1990, PP. 230, 231)؛ وبالتالي لا يمكننا- في رأي براور- استخدام المبادئ المنطقية التقليدية من أجل شرح ماهية الرياضيات أو وصف كيفية تنفيذ البناءات الرياضية. (Kaneko,2002, P. 37).

وعلى ذلك، فإنَّ الهدف من حملة براور القائمة ضد مبدأ الثالث المرفوع؛ هو التقليل من أهمية المنطق في الرياضيات، إلى أن تطورت حججه، وأصبحت محاولة للتقليل من شأن المبادئ المنطقية.

لكن قبل عرض انتقاد براور لمبدأ الثالث المرفوع لا بُدَّ من توضيح نقطة مهمة، وهي أنَّ مناقشة براور للمبادئ المنطقية، وخاصة مبدأ الثالث المرفوع، قد مَرَّتْ بعدة مراحل تاريخية؛ يمكن إرجاع ذلك إلى تردده في التخلي عن أحد أركان المنطق التقليدي، فهو إرث عمره أكثر من ألفي عام. والآن، **ما مراحل التطور الفكري الخاصة بالمبادئ المنطقية عند براور؟**

قد يُفَاجَأ القارئ عندما يعلم أنَّ في أطروحة براور- المُقدَّمة في عام 1907م- عَدَّ مبدأ الثالث المرفوع مبدأً صحيحًا، ولكنه غير مفيد، معبرًا عن ذلك بقوله: **"إمَّا تكون الدالة قابلة للاشتقاق، أو غير قابلة للاشتقاق"**. (Brouwer, 1975, P. 75). هذه القضية غير مفيدة لا تخبرنا بشيء، فهي تُعَبِّرُ عن المعنى نفسه، **"إذا كانت الدالة غير قابلة للاشتقاق، إذن لا يمكن أن تكون غير قابلة للاشتقاق"**. (Brouwer, 1975, P. 75). من خلال ذلك يتضح أنَّ براور يرى أنَّ مبدأ الثالث المرفوع مبدأً فارغًا من المعنى، ويشبه بالصيغة الآتية: " إذا كانت ق، إذن ق".

بعد عام واحد فقط، في عام 1908م، تَغَيَّرَ فكره فقد قدم مقالة بعنوان" عدم الثقة في المبادئ المنطقية" The Unreliability of the Logical Principlesيطرح من خلالها تساؤلًا قائمًا على افترض أنَّ البناء الرياضي الخالص قد اكتمل، وفي مرحلة اختبار البناء المنطقي على أنه جزء من البناء الرياضي، إذا تُفحص النتائج المنطقية في مقابل نتائج النسق الرياضي الأساسي، متسائلًا: **"هل يمكن في حالة البناءات الرياضية الخالصة أن يتجاهل مؤقتًا حقيقة النسق الرياضي الذي بُنْيِ، والعمل مع البناء اللغوي الملازم له، مسترشدًا بمبادئ القياس Syllogism والتناقض والثالث المرفوع؟"**. (Brouwer, 1975, P. 109). لقد كانت إجابته بإيجاز هي: **"بالإيجاب فيما يتعلق بالقياس المنطقي ومبدأ التناقض، ولكن فيما يتعلق بمبدأ الثالث المرفوع فإنَّ الجواب بالنفي إلَّا في حالات خاصة، بحيث لا يمكن أن يعمل هذا المبدأ بشكل عام بوصفه أداة لاكتشاف حقائق رياضية جديدة "**. (Brouwer, 1981, P. 5).

يمكن تحليل هذه الإجابة لمعرفة سبب قبول براور للقياس ولمبدأ التناقض، وأيضًا سبب رفضه لمبدأ الثالث المرفوع، حيث كانت هذه المقالة تمثل أول هجوم منه على صحة مبدأ الثالث المرفوع.

فيما يتعلق بالقياس، نجد رغم أن براور أكد في إجابته على قبوله، فإنَّه عَدَّه ليس أكثر من مجرد تحصيل حاصل (Brouwer, 1975, P. 109)، ويمكن التعرف أكثر على موقف المنطق الحدسي من القياس من خلال هايتنج، فقد عمل على تفسيره لتأكيد أنَّ المنطق في آخر الأمر لم يكن إلَّا جزءًا من الرياضيات. وعلى حد تعبير هايتنج يقول (Heyting, 1974, P. 86): دعونا نفكر في هذا القياس المنطقي:

(1) سقراط إنسان

(2) كل إنسان فانٍ

(3) سقراط فانٍ

أولًا- يمكن التعبير عنه باللغة الرمزية هكذا:

(1) "أ" هو "ب"

(2) كل "ب" هو "ج"

(3) "أ "هو "ج"

فإذا اتفق (1) و(2)، من المتوقع أن يتفق أيضًا مع (3).

ثانيًا- يمكن التعبير أيضًا بصيغة أخرى: إذا كانت القضية (1) صادقة والقضية (2) صادقة، فإنَّ القضية (3) صادقة أيضًا.

ثالثًا- يمكن عَدَّها نظرية رياضية؛ بمعنى إذا كان "a" شيئًا ينتمي إلى الشكل "b"، و"b" جزء من الشكل c، فإنَّ "a" ينتمي إلى "c".

$$\begin{array}{c} a\in b \\ \underline{b \subset c} \\ a\in c \end{array}$$

من الواضح- كما يرى هايتنج- أنَّه لا يمكن استخدام أي من هذه التفسيرات لتأسيس الرياضيات. على العكس من ذلك، يفترض أنَّ كل منهم رياضيات؛ إذ إن أولًا وثانيًا تنتمي إلى الرياضيات التطبيقية. أما ثالثًا فتنتمي إلى نظرية المجموعات؛ وبالتالي إلى الرياضيات البحتة، والتي هي نفسها جزء متطور إلى حد ما من الرياضيات (Heyting, 1974, P. 86).

بشكل عام، لا يمكن أن يكون المنطق أساسًا للرياضيات، بل على العكس، فهو جزء متطور من الرياضيات، حيث أثبت هايتنج كيف يمكن عد القياس في جميع حالاته جزءًا من الرياضيات سواء كانت الرياضيات التطبيقية أو الرياضيات البحتة، وبالتالي تُعد النظريات المنطقية نظريات رياضية. ومن خلال تحليل هايتنج للقياس المنطقي، تَبَيَّنَ لنا أنه لم يختلف كثيرًا عن رأي أستاذه- براور- الذي أكد وجوده وعَدَّه تحصيل حاصل، كذلك الأمر مع هايتنج، الذي أقر بوجوده، ولكن استخدمه لتأكيد أن المنطق جزء من الرياضيات.

هذا عن سبب قبول براور للقياس، أمَّا فيما يتعلق بمبدأ التناقض فقد ذهب الحدسيون إلى أنَّ المبدأ الحدسي المباشر هو مبدأ التناقض، وليس مبدأ الثالث المرفوع؛ وذلك لأنَّهم رأوا أن حدسنا المباشر لا يقبل التناقض (محمد، 1982م، ص 19). فنجد براور أيد وجوده، وأكد أنَّه لا يقبل الجدل (Brouwer, 1975, P. 109)، حيث لا يمكن أن يوجد "a" و"لا- a" في الوقت نفسه؛ أي: $\neg(a \wedge \neg a)$، فإذا كان المنطق الحدسي يرفض مبدأ الثالث المرفوع، فإنَّه يقبل مبدأ التناقض؛ لأنَّه واضح من الناحية الحدسية، بل ويعده مستمرًا في النسق المنطقي الحدسي.

لكن فيما يتعلق بمبدأ الثالث المرفوع، لقد أثبت براور بطلانه معبرًا عنه بالصيغة الرياضية $\forall p\ (p \vee \neg p)$[10]، الذي عَدَّه ليس مبدأً صحيحًا على الإطلاق بل باطلًا(McCarty, 2005. P. 359). فقد أعرب براور عن شكوكه في صحته؛ لأنه يدعي أنَّه ليس من الصحيح بالنسبة لقضية ولتكن "p"، إما أن يكون لدينا برهان على "p" أو لدينا برهان على نفي "p". (Zach & Badesa, 2010, P. 86). إلى أن انتهى به الأمر إلى القول بـــ: **"أن التساؤل حول صحة مبدأ الثالث المرفوع تعادل التساؤل عما إذا كان يمكن أن توجد مشاكل رياضية غير قابلة للحل"**. (Brouwer, 1975, P. 109). هذا يعني أن إثبات صدق قضية أو كذبها، يستلزم بالضرورة أنَّ كل مسألة رياضية قابلة للحل.

لكن إذا ما تساءلنا **هل كل مشكلة رياضية لها حل بالضرورة؟** لقد أقر براور أنَّ من غير المؤكد أنَّ لكل مشكلة رياضية يجب أن يوجد لها حل دقيق، فليست كل المشاكل قابلة للحل، وهذا ما يؤكد رفضه لبديهية قابلية الحل The Axiom of The Solvability، إذ إن القضية قد لا تكون صادقة ولا كاذبة، وهنا يبدأ التشكيك في صحة مبدأ الثالث المرفوع.

بالتالي، كان هذا الرأي متعارضًا مع رأي هلبرت، الذي كان يعتقد أن كل مشكلة رياضية يمكن حلها، فمن خلال مقدمة مقالته "المشاكل الرياضية"، التي شارك بها في المؤتمر الدولي للرياضيات لعام 1900م، كتب يقول: **"يحدث أحيانًا أن نسعى إلى حل مشكلة رياضية في ظل وجود فرضيات غير كافية أو معنى غير صحيح؛ ولهذا السبب لا يمكن الحل. ثم تنشأ مشكلة استحالة الحل تحت هذه الفرضيات المعينة ... تؤدي مسألة استحالة وجود حلول معينة دورًا بارزًا، ونحن ندرك بهذه الطريقة أن المشاكل القديمة والصعبة، مثل برهان تربيع الدائرة، وجدت في النهاية حلولًا مرضية ودقيقة تمامًا؛ لذا فمن المحتمل أن هذه الحقيقة المهمة إلى جانب الأسباب الفلسفية الأخرى هي التي تؤدي إلى القناعة، التي يشاركها كل عالم رياضيات، ولكن لم يدعمها أي شخص حتى الآن بالبرهان، وهي أنَّ كل مشكلة رياضية محددة يجب أن تكون بالضرورة قابلة لحل دقيق، إما في شكل إجابة فعلية على السؤال المطروح، أو بالبرهنة على استحالة حلها".** (Hilbert, 1990, P. 412).

من خلال قول هلبرت، نجد أنه كان يعتقد أن لا توجد مشكلة إلا ولها حل، ومهما كانت صعوبة المشكلة إلَّا أن لديه قناعة بأنها قابلة للحل؛ ذلك الأمر الذي اعترض عليه براور بسبب وجود مشاكل بالفعل غير قابلة للحل.

لكن، **لماذا يفترض براور أن التأكيد المطلق لمبدأ الثالث المرفوع يعادل ادعاء وجود طريقة عامة لحل المشكلات الرياضية؟**

قد يكون أحد الأسباب هو أن الشخص الذي يُقر بالقضية ($s \vee \neg s$)، يعطيك فهمًا بأنَّه في وضع يمكنه تقرير "s" أو"¬s"، ولكن من الواضح أنَّ "s" و"¬s" لم تعالج كل البدائل. ومن هنا يؤكد براور أنه لا يمكن حل جميع المشاكل الرياضية، وبالتالي يهاجم الاعتقاد بأنه يمكن حلها جميعًا. ويدعي- على وجه الخصوص- أنَّه لا يمكن حل العديد من المشاكل التي تنطوي على المجموعات اللامتناهية. وبما أنهم لا يستطيعون، فعلينا أن نكتفي بوجود الكثير من القضايا التي تتخذ صورًا مثل "s" و"¬s"، التي لم تعالج كل البدائل؛ وبالتالي تخالف المبدأ التقليدي الثالث المرفوع. (Anderson, et. al., 1962, P. 125).

ومن الملاحظ أنَّ براور استشهد بمقالة هلبرت الخاصة بـــ "المشاكل الرياضية"، من أجل تأكيد اعتراضه على صحة مبدأ الثالث المرفوع، إذ كان هلبرت يرى أنَّ جميع المشاكل قابلة للحل، وبشكل عام، تتكون صورة "المشكلة" في الرياضيات من التساؤل حول ما إذا كانت الصفة المؤكدة تحتفظ بكيانات مؤكدة أم لا. أما بالنسبة لهلبرت فقد كانت جميع المشاكل قابلة للحل؛ لأنَّه لم يكن من الضروري البرهنة على الصفة المؤكدة من أجل النظر إلى المشكلة على أنها قد حُلَّتْ. علاوة على ذلك، كان في رأيه البرهنة على ذلك، تعني أن من المستحيل أن تمثل الصفة بالفعل حلًّا للمشكلة. وبالنظر إلى التفسير الحدسي لمبدأ الثالث المرفوع من هذه الزاوية، نجد أنه يؤكد أنه لكل صفة ولكل كيان رياضي يمكن إثباته إما بالاحتفاظ بالصفة أو عدم الاحتفاظ بها. (Franchella, 1995, PP. 309, 310). وعلى حد تعبير هايتنج: "**يمكن اختزال التساؤل حول قابلية حل المشاكل الرياضية إلى التساؤل حول قابلية البرهان**". (Heyting, 1983, P. 59). وعلى ذلك، إذا كانت المشكلة الرياضية لا تزال قائمة، فإنَّ هذه المشكلة تعلق صحة مبدأ الثالث المرفوع.

بالإضافة إلى ذلك، يرى براور أن ليس هناك أسباب كافية لبديهية قابلية الحل، تلك البديهية التي صاغها هلبرت، قائلًا: "**بما أنَّ المنطق يقوم على الرياضيات - وليس العكس- لا يجوز استخدام مبدأ الثالث المرفوع بوصفه جزءًا من البرهان الرياضي، وإنما له فقط قيمة تعليمة وإرشادية، لكن النظريات التي تستخدم هذا المبدأ في برهانها تفتقر إلى كل محتوى رياضي**". (Brouwer, 1998, P. 23).

إذا افترضنا أنَّ لكل مشكلة رياضية لها حلًّا، فإنَّ كل قضية ولتكن "a" سيصبح لها ضمانٌ بأن يُثبت "a" أو "¬a" في النهاية، عندئذٍ يتحقق شرط تقرير صحة الفصل ($a \vee \neg a$)؛ لذا يُعَبِّر براور عن مبدأ الثالث المرفوع بقوله: "**يمكن الحكم على كل تقرير رياضي وليكن "a"؛ أي: يمكن إثبات صدق "a" أو إثبات تناقض "a"** ". (Brouwer, 1975, P. 524).

هذا عن مجمل رأي براور في مبدأ الثالث المرفوع في تلك الفترة، ولكن عاد مرة أخرى في عام 1918م، وقَدَّمَ مقالة بعنوان: "أسس نظرية المجموعات المستقلة عن المبدأ المنطقي الثالث المرفوع"، وبعد نشرها بدأ يطور أجزاء من الرياضيات دون أن تعتمد على مبدأ الثالث المرفوع، ثم كتب عددًا من المقالات التي حَلَّلَ فيها النفي المنطقي واللزوم في إعادة بناء الرياضيات الجديدة. وفي عام 1923م قَدَّمَ مقالة بعنوان: "حول أهمية الثالث المرفوع في الرياضيات، وخاصة في نظرية الدالة"، اقترح وصفًا

إيجابيًّا لكيفية انتقال مبدأ الثالث المرفوع، بشكل غير منطقي، من المجال المتناهي إلى المجال اللامتناهي.(Zach & Badesa, 2010, P. 86).

مُعَبِّرًا عن ذلك بقوله: **"في إطار النسق المتناهي المحدد، يمكننا دائمًا اختبار خصائص هذه الأنساق؛ أي: إما بالإثبات أو بالنفي ... وهذا الاختبار غالبًا ما يوفره مبدأ الاستقراء الرياضي (12) Mathematical Induction، وحتى في الأنساق التي تمتاز بعدد عناصرها الكبيرة، فإنَّ إمكانية اختبار هذه العناصر يمكن إجراؤها بشكل نسبي".** (Brouwer, 1967, P. 335).

واستطرد قائلًا: **"وعلى أساس قابلية الاختبار، فإنَّ هذه الخصائص الخاصة بالنسق المتناهي المحدد ينطبق عليها مبدأ الثالث المرفوع، ذلك المبدأ الذي يعني أنَّ كل خاصية إما أن تكون صحيحة أو مستحيلة".** (Brouwer, 1967, P. 335).

بتعبير آخر يؤكد براور: **"يُعَدُّ الاعتقاد الدائم بالصحة الكلية لمبدأ الثالث المرفوع في الرياضيات- وفقًا للاتجاه الحدسي- ظاهرة تاريخية مثل الاعتقاد القديم، الذي كان يقول إنَّ الأرض ثابتة".** (Brouwer, 1975, P. 492).

هكذا يؤكد لنا براور من خلال آرائه أنه لم يكن يعترض على تطبيق مبدأ الثالث المرفوع على الأنساق المتناهية؛ وذلك لوجود إمكانية لتطبيقه على عناصر هذا النسق، وإنَّما اعتراضه كان ضد الصحة الكلية لمبدأ الثالث المرفوع خصوصًا فيما يتعلق بالأنساق اللامتناهية.

لكن ينبغي أن لا يُفْهَمُ موقف براور من مبدأ الثالث المرفوع على أنَّه تأكيد إنكار هذا المبدأ، بل المقصود الرفض Rejection وليس الإنكار Denial، فالإنكار شيء، وتقرير عدم استعماله بغرض الحرص على الدقة شيء آخر. والدليل على ذلك، هو تطبيق مبدأ الثالث المرفوع على المجموعات المتناهية (رور، 2008م، ص 120)؛ وعلى ذلك فإنَّ المنطق الحدسي لا يدعو إلى الامتناع عن استعمال المنطق التقليدي، بل هو يقتصر مجاله فقط على المجموعات المتناهية، فالمنطق التقليدي بالنسبة لبراور مناسب للمجال المتناهي فقط وليس للمجال اللامتناهي. (Posy, 2005, P. 335).

وعلى ذلك، يمكن القول إن رفض براور لاستخدام مبدأ الثالث المرفوع جاء من خلال التسليم بما يأتي(Brouwer, 1998, P. 41):

1- أنَّ البحث في الأسباب التي تبرر هذا المبدأ، ومجال صحته تمثل هدفًا أساسيًّا من أهداف البحث في الأسس الرياضية.
2- أن يقتصر مجال صحته في الرياضيات الحدسية على الأنساق المتناهية فقط.

بذلك يرى براور أنَّ تطبيق مبدأ الثالث المرفوع لا يمكن أن يتم دون قيد ولا شرط، وإنَّما في ميدان رياضي مُتناهٍ ومحدد بوضوح؛ وهذا يعني أن المنطق التقليدي- وفقًا لرأي براور- لا يعبر بصدق وفعالية إلَّا عن الأمور التي تخص المجموعات المتناهية، ولا يذهب أبعد من ذلك (الجابري، 2002م، ص 116). وإلا كان ذلك- في رأي براور- سببًا لظهور المفارقات.

من أسباب رفض براور الصحة المطلقة لمبدأ الثالث المرفوع، هو عده المصدر الأساسي لوجود المفارقات، حيث تظهر المفارقات نتيجة أننا لا نزال نطبق المبادئ المنطقية على المجموعات اللامتناهية. وتؤكد الرياضيات الحدسية صحة هذه المبادئ، وتطبيقها بما في ذلك مبدأ الثالث المرفوع على المجموعات المتناهية، أمَّا فيما يتعلق بالمجموعات اللامتناهية فإنَّ بعض المبادئ تظل صحيحة، مثل: الهوية، والتناقض، بينما مبدأ الثالث المرفوع وما يرتبط به من استدلالات لا تكون صحيحة بالنسبة لهذه

المجموعات. (Kneal & Kneal, 1962, P. 675)؛ وذلك لعدم وجود وسيلة محددة للتأكد من صدق أو كذب القضايا المتعلقة بالمجموعات اللامتناهية.

فقد أثبت المنطق الحدسي- من وجهة نظر منطقية بحتة- أنَّ مبدأ الثالث المرفوع لا يُعَدُّ صحيحًا بشكل مطلق، وإن كانت المفارقات تتسبب- في الواقع- في عدم صحة هذا المبدأ، وذلك بما تقدمه من قضايا لا يمكن التصريح فيها سواء بالصدق أو الكذب. (ديمتريو، 1997م، ص95).

يرى براور: **"أنَّ وظيفة المبادئ المنطقية ليست في توجيه الحجج المتعلقة بالخبرة التي تأتي بها الأنساق الرياضية، ولكن لوصف الدقة التي تُلاحظ لاحقًا في لغة الحجج، وأن إدراك مثل هذه الدقة في الحديث، بغض النظر عن أي نسق رياضي، هو لحل مشكلة المفارقات"**. (Brouwer, 1975, P. 108).

من هنا جاء اعتقاد براور بأنَّه إذا قام بتضييق مجال الصحة لمبدأ الثالث المرفوع، يكون قد تخلص من مفارقات اللامتناهي. ورغم ذلك، فإنَّ الاتجاه الحدسي لم يظهر فقط كضرورة لإيجاد حل لمشكلة المفارقات، حيث كان لهذا التصور سمة عامة ومستقلة، فضلًا عن محاولة إيجاد تفسير لأسس الرياضيات وطبيعيتها. (ديمتريو، 1997م، ص ص 99-100).

يتضح لنا من خلال ذلك أنَّ مبادئ المنطق الحدسي لا تكتسب صحتها إلَّا من خلال الرياضيات؛ وعلى ذلك فإنَّ الرياضيات هي التي تحدد شمولية مبدأ الثالث المرفوع وصحته- وليس العكس- ومن هنا فإنَّ مبدأ الثالث المرفوع لا يمكن تطبيقه على القضايا غير القابلة للبرهان؛ وبذلك تخلص براور من مفارقات المجموعات اللامتناهية. (خليل، 2002م، ص 109).

لكن دعنا الآن ننتقل إلى الأنساق اللامتناهية، حيث يوضح براور كيف طُبِّقَتْ مبادئ المنطق على الرياضيات اللامتناهية، التي يعود مصدرها إلى الرياضيات المتناهية، ويرى أنَّه لا يوجد بالضرورة مبرر لتطبيق هذه المبادئ على الرياضيات اللامتناهية. وخاصةً، إذا كان هذا التبرير يبدو كأنَّه يفتقر إلى مبدأ الثالث المرفوع والاستدلالات القائمة عليه.

كتب براور يقول: **"وهكذا، نُسبت الصفة القبلية بشكل متسق إلى قوانين المنطق لدرجة أنه حتى وقت قريب طُبِّقَتْ هذه القوانين بما في ذلك مبدأ الثالث المرفوع دون قيد ولا شرط حتى في رياضيات الأنساق اللامتناهية"**. (Brouwer, 1975, P. 336).

وفقًا لوجهة نظر براور، فإنَّ مصدر المنطق التقليدي يرجع إلى رياضيات المجموعات المتناهية، ولكن نتيجة لخطأ ما عُدَّ المنطق بمنزلة شيء قبلي لجميع الرياضيات؛ وبالتالي طَبَّقَه بدون مبرر على رياضيات المجموعات اللامتناهية. (Weyl, 1946, PP. 9, 10).

بذلك يؤكد لنا براور وجود خطأ في تطبيق قواعد المنطق، مؤكدًا أنَّ هذه القواعد قد طُوِّرَتْ في الأصل لتطبيقها على مواقف محدودة، وأنَّه لا يمكن افتراض أنَّ هذه القواعد تنطبق على جميع المواقف دون شروط.

يمكن تقديم مزيد من الإيضاحات على أسباب رفض براور لتطبيق مبدأ الثالث المرفوع على الأنساق اللامتناهية، من خلال المثال الآتي، دعونا نفكر فيما يعرف بالأعداد التامة Perfect Numbers(12). فلنأخذ القضية القائلة "يوجد عدد فردي تام وليكن s"، فإذا افترضنا أنَّ هذه القضية صادقة، إذن ما تعنيه بـــ "s"، بالنسبة إلى براور، هو أنه إذا مررنا بالأعداد الفردية فسوف نصل أخيرًا إلى عدد تام. ولكن إذا نفينا هذه القضية؛ أي: "s¬"، فليس المقصود بها عدم اكتشاف أي عدد فردي تام؛ وذلك لوجود مجموعة لامتناهية من الأعداد الفردية، وإنَّما المقصود بـــ "s¬"، وفقًا لبراور، هي أن فكرة العدد الفردي التام فكرة متناقضة. (Anderson, et. al., 1962, PP. 124, 125).

من هنا فإنَّ مشكلة مبدأ الثالث تنشأ فقط فيما يتعلق بالمجموعات اللامتناهية، مثل تلك الخاصة بالأعداد الفردية. أمَّا فيما يتعلق بالمجموعات المتناهية فالأمر ليس كذلك، فبراور لا يتشكك في تطبيق هذا المبدأ على المجموعات المتناهية. على سبيل المثال، تعد القضية "يوجد عدد تام واحد على الأقل بين الــ 1 و10^{100}" بالتأكيد هذه القضية إما صادقة أو كاذبة؛ لأنه يمكن الانتقال عبر جميع الأعداد الفردية بين الــ 1 و10^{100}) (Anderson, et. al., 1962, P. 125)؛ أي: إمكانية إتمام البحث موجودة من حيث المبدأ، هذه الإمكانية هي التي تجعل من مبدأ الثالث المرفوع مبدأً صالحًا عند براور للتفكير في المجموعات المتناهية. (Kleene, 1971. P. 47).

بصفة عامة، جادل براور بأنَّ مبدأ الثالث المرفوع غير جدير بالثقة في الأنساق اللانهائية. فقد قُدَّمَ أمثالة عكسية لهذا المبدأ، والمعروفة الآن باسم "الأمثلة المضادة البراورية"[13] Brouwerian Counterexamples منها (Dalen, 2013, P. 104):

- هل يوجد في النظام العشري لــ π [14] عدد عشري يظهر على المدى الطويل أكثر من غيره؟
- هل يوجد في النظام العشري لــ π عدد لا متناهٍ من الأزواج العشرية المتتالية المتساوية؟

في كلتا الحالتين، ليس لدينا أي دليل على صدق هذه القضايا أو كذبها؛ وبالتالي فإنَّ مبدأ الثالث المرفوع يُعَدُّ غير صحيح.

لنأخذ على سبيل المثال، القضية التي يرمز إليها بــ "p" التي تعبر عن "وجود سبع سبعات"[15] متتالية في النظام العشري الذي لا نهاية له لـ π"، إذا كان يوجد سبعة سبعات متتالية، على سبيل المثال، في أول مليون أو مليار أو تريليون من هذا النظام العشري، فيمكننا أن نعرف ببساطة وبشكل قاطع عن طريق عَدّ هذه الأعداد العديدة، ولكن نظرًا لعدم إمكانية عَدّ جميع الأعداد اللامتناهية لهذا النظام العشري، فإنَّ القضية "p" في هذه الحالة لا يمكن تأكيدها أو تفنيدها، حتى من حيث المبدأ. وبعبارة أخرى، لا يمكن أبدًا، ولا حتى من حيث المبدأ، أن يوجد أدلة كافية لتأكيد مبدأ الثالث المرفوع "$p \vee \neg p$"، والذي يعني حدسيًا، إما أن تُؤكد "p" أو تُفند "p". (Nolt, 1997, P. 429).

وعلى ذلك، يمكن القول إن محاولات براور لرفض مبدأ الثالث المرفوع كانت من خلال أمرين، هما (Stigt, 1990, P. 248):

1. إثبات وجود أمثلة مضادة لمشكلات رياضية غير قابلة للحل بشكل أساسي.
2. الكشف عن المفارقات الناشئة عند تطبيق مبدأ الثالث المرفوع على الأنساق اللامتناهية.

إذا كان مبدأ الثالث المرفوع – في رأي براور- عبارة عن تقرير مجموعة من الرموز التي تمثل البناءات المكتملة بالإضافة إلى مجرد فرضيات محتملة للبناءات المستقبلية (Stigt, 1990, P. 228)، فإنَّه يؤكد عدم إمكانية التعبير عن البناءات الرياضية بلغة تعتمد على مبدأ الثالث المرفوع، وما يعتمد عليه من مبادئ الاستدلال؛ لأنَّ استخدامه في مجال المجموعات اللامتناهية يؤدي إلى التناقض. (السرياقوسي ، 1982م، ص 362).

هكذا، يتضح لنا مِمَّا سبق أهم المحطات التاريخية في فكر براور، التي جاء من خلالها رفضه لاستخدام المبادئ المنطقية بوصفها دليلًا أو برهانًا، بل يرى أن كل ما تفعله مجرد وصف للدقة التي تُلاحظ في الممارسة الرياضية. وخير مثال على ذلك، مبدأ الثالث المرفوع؛ فهو مثال لمبدأ منطقي أصبح دليلًا للممارسة الرياضية بدلًا من مجرد وصفه. حيث إن من المفترض أن يستخدم مبدأ الثالث المرفوع في ملاحظة المجال "المتناهي" فقط، ذلك المجال الذي يمكن التحقق من عناصره، إلَّا أنَّ ما يحدث على العكس تمامًا، حيث يُعمم على ما لا يمكن ملاحظته، بل ويُعده قانونًا رياضيًّا. (Ruitenburg, 2008. PP. 134, 135).

بتعبير براور يمكن توضيح إسهاماته في المنطق وآرائه حول استخدام المبادئ المنطقية بطريقته المميزة، بقوله: **"آمل أن أكون، قد أوضحت أنه على الرغم من أن الاتجاه الحدسي يؤكد دقة المنطق، فإنَّه يرفض أن يكون المنطق مصدرًا للصدق الرياضي"**.(Brouwer, 1975, P. 494).

ثالثًا- النفي والنفي المزدوج:

والآن، بعد أن انتهينا من توضيح العلاقة بين المنطق والرياضيات في رأي أصحاب الاتجاه الحدسي، وتحديد دور المنطق ومبادئه في الرياضيات الحدسية، وخاصةً مبدأ الثالث المرفوع، الذي عَدَّوه غير جدير بالثقة، حيث أُعيد بناء الرياضيات، دون استخدام هذا المبدأ. إذن، لنا أن نتساءل عن **أهم النتائج التي ترتبت على رفض مبدأ الثالث المرفوع؟**

نتيجة لرفض تطبيق مبدأ الثالث المرفوع على المجموعات اللامتناهية لم يبقَ للحدسيين إلَّا أن يأخذوا بعين الاعتبار المجموعات المتناهية؛ لأنَّ البرهان على وجود المجموعات اللامتناهية غير موجود، وبعبارة أدق تكون القضايا التي تضم فئات أو مجموعات لامتناهية غير مبرهنة. وهذا الموقف للاتجاه الحدسي سيؤدي في النهاية إلى التخلي عن كثير من فروع الرياضيات التي لا تزال موجودة ومأخوذ بها. (خليل، 2014م، ص 239).

هذا ما أكده رسل بقوله: **"ترتبت على ذلك، أن أجزاء كبيرة من الرياضيات التي ظن لقرون كثيرة أنها تقوم على أساس وطيد قد أصبح مشكوكًا فيها. ويرتبط بهذه النظرية المذهب المسمى بالنهائية Finitism، الذي يضع موضع الشك القضايا التي يدخل فيها مجموعات لامتناهية على أساس أنَّ تلك القضايا لا يمكن تحقيقها. وإذا حملناه على محمل الجد لأدي إلى نتائج أكثر هدمًا مِمَّا يعترف به أنصاره... وهذا قد يمسح بجرة قلم جميع العلوم والرياضيات، ليس فقط تلك الأجزاء التي يعدها الحدسيون موضع شك"**(رسل، 1958، ص ص 7، 8). ذلك الأمر هو ما جعل رسل يرفض الاتجاه الحدسي.

من ناحية أخرى، نتيجة لاعتراض أنصار المنطق الحدسي على مبدأ الثالث المرفوع، جعل بعض المناطقة تُفَسَّرُ ذلك على أنه دعوة إلى منطق ثلاثي القيم؛ نتيجة لرفضهم فكرة أنَّ كل قضية إما أن تكون صادقة أو كاذبة جعلتهم يعتقدون أن المنطق الحدسي تأكيد على إمكانية وجود قيمة صدق ثالثة. .(Granström, 2011, P. 166)

من أهم الآثار المترتبة على رفض أنصار المنطق الحدسي لمبدأ الثالث المرفوع اختلاف مفهوم النفي Negation، فكان النفي في مقدمة حملة براور ضد استخدام المنطق والمبادئ المنطقية في الرياضيات. ويُعَدُّ مفهوم النفي من المفاهيم الأساسية في نقد أنصار المنطق الحدسي للمنطق التقليدي؛ نتيجة للاستخدام السائد للنفي في المنطق التقليدي، ولا سيما في مبادئ التناقض والثالث المرفوع. .(Stigt, 1990, P. 238)

يمكن القول: "أن فكرة النفي – بشكل عام- تؤدي دورًا رئيسًا ومهمًا في المنطق الحدسي"، وربما تأتي هذه الأهمية من منطلق أنها يمكن أن تمثل أحد جوانب الاختلاف بين المنطقين: الحدسي والتقليدي، وكما يشير هايتنج بأنَّ الاختلاف الأساسي بين المنطق التقليدي والمنطق الحدسي يَكْمُنُ في خصائص النفي (عبد العزيز، 2013م، ص 12).

يوضح هايتنح نتيجة لوجود صورتين للنفي جعل بعض المناطقة تعتقد وجود تناقض في المنطق الحدسي، وبتعبير هايتنج كتب يقول: **"ولكن من الخطأ الزعم بأن مبدأ الثالث المرفوع كاذبٌ؛ لأنَّه يوجد فرق بين عدم الصحة والكذب، يمكن توضيح الفرق بين عدم الصحة والكذب على النحو الآتي: إن المقصود بالكذب؛ النفي الرياضي القائم على التناقض؛ أي: "عدم الصحة"، أما نفي الكلام العادي، فلا**

يعني على الإطلاق تناقضًا. في القضية الرياضية يحدث النفي من النوع الأول فقط، ولكن في القضية اللا رياضية لا يمكن تجنب الأخير. ويُعَدُّ مبدأ الثالث المرفوع كاذبًا في القضية الرياضية، أمَّا في القضية اللا رياضية فإنَّه لم يثبت قط أنَّه صادق. ونتيجة للخلط بين هذين الشكلين من النفي جعل البعض يعتقد بوجود تناقض في المنطق الحدسي". (Heyting, 1958, P. 109).

بناءً على ذلك، يظهر اختلاف مفهوم النفي بين أنصار المنطق التقليدي وأنصار المنطق الحدسي؛ الذي يرجع إلى استبدال مفهوم الصدق بمفهوم البرهان؛ إذ إن النفي التقليدي يستخدم لغة تعتمد على مفاهيم الصدق والكذب، في حين النفي الحدسي يستخدم لغة تعتمد على مفاهيم قابلية البرهان وقابلية التفنيد.

يُعَبِّرُ هايتنج عن المقصود بالنفي بقوله: **"يمكننا أن نثبت نفي القضية "a" إذا استنتجنا تناقضًا من الافتراض الذي يثبت "a" ".** (Heyting, 1958, P. 108). وبالتالي، فإنَّ "p ¬ ├ " تعني: **"من المعروف كيف يمكن استنتاج تناقض من البرهان المفترض لـــ "a" ".** (Heyting, 1998, P. 307).

هكذا، يتضح لنا أنَّ تفسير هايتنج للنفي يحتكم إلى برهان افتراضي على تناقض "a"، الذي قد يستخدم بوصفه مقدمة تُثبت وجود البناء "a"؛ بمعنى، إذا كانت "أ" = "ب" متناقضة؛ أي: إذا أمكننا أن نقوم ببناء نستنبط فيه تناقضًا من الافتراض "أ" = "ب"، حق لنا القول بأن "أ"، "ب" لا يتطابقان، أو أن نقول "أ" ≠ "ب" (السرياقوسي، 1982م، ص 442).

يأتي تفسير هايتنج للنفي من خلال قراءة براور لمبدأ الثالث المرفوع، حيث قدم براور تعريفًا للنفي على أنَّه يجب التعبير عن القضية "a كاذبة" بالقول بأن "a تؤدي إلى تناقض"، ومن الواضح أنَّ الحجة التي قدمها براور تتناسب مع تفسيره للصدق. ولكن لا يوجد توضيح لمثل هذه الحجة بالتفصيل في كتاباته (Dalen, 2008, PP. 18, 19). فقد عَبَّرَ براور عن النفي بقوله: **"إن التقرير الرياضي لــ "α" لا يمكن التحقق منه؛ أي: عدم وجود طريقة معروفة لإثبات أن "α" محال Absurd".** (Brouwer, 1975, P. 478). وعلى ذلك، يتضح لنا أن براور يستخدم النفي الرياضي بمعنى "المحال" أو "التناقض" Contradiction، الذي يعني "أنه من العبث أن تكون "α" ".

بذلك، يفسر براور النفي على أنَّه بناء فَشَلَ في تحقيق هدفه، أو بتعبير أفضل "بناء لم يعد من الممكن أن يستمر"، وبذلك أكد براور أنَّ هذا هو ما يقصده بالمحال بشكل عام؛ وهو البناء الذي يؤدي إلى التناقض (Franchella, 1995, P.309).

من خلال ذلك، يتضح أنَّه يمكن البرهنة على " a ¬"، إذا كان يوجد دليل على أن "a" لا يمكن إثباتها أبدًا؛ أي: وجود دليل يوضح أنَّ البرهنة على "a" تؤدي إلى التناقض. بمعنى آخر، إذا كان يمكن إثبات أن "a" = "a ¬¬"، فإنَّه يمكننا أيضًا إثبات البناء القائل بأنَّ"0" = "1". (Grandy, 2005, P.541).

بهذا المعنى، يتضح لنا الاختلافات الجوهرية بين الحدسيين والتقليديين في تفسير النفي، فنجد النفي التقليدي للصيغة Φ، فإذا كانت Φ صادقة، فإنَّ نفيها "~ Φ" بمعنى Φ كاذبة، أما النفي الحدسي للصيغة Φ، فالمقصود بها أن "Φ¬" تعنى أن "Φ قابلة للتفنيد. ومن هنا يظهر الفرق بين "Φ الكاذبة" و"Φ القابلة للتفنيد" فهما ليسا مترادفين (Cook, 2005, P. 394)؛ وذلك لأنَّ النفي الحدسي الرياضي يُشار إليه بـ "التناقض"، في حين النفي التقليدي يُشار إليه بـ "الكذب".

وبِنَاءً على أنَّ مبدأ الثالث المرفوع لا يمكن أن يكون مصدر صدق في الرياضيات إلاَّ إذا كانت الحقائق التي يتضمنها يمكن تجريبها؛ والتجربة تعني هنا الحدس الذي يتم به بناء الكيانات الرياضية، نجد

أن الحدسيين قد واجهتم مشكلة كبيرة لم ينتبه إليها هايتنج قامت على النفي الحدسي. فقد أقر كلٌّ من براور وهايتنج أنَّ قضية "الدائرة المربعة "a" لا يمكن أن توجد" يمكن أن تعد نظرية، ولذلك لا بُدَّ أن تكون تقريرًا صحيحًا من الناحية اللغوية عن تجربة ذاتية وواضحة بذاتها، ويصفها براور على أنَّها بناء يتكون أولًا من افتراضنا بأننا قد بنينا مربعًا، وفي الوقت نفسه دائرة، ثم توصلنا من هذا الافتراض إلى تناقضٍ. (Heyting, 1971, P. 124). ولكن البناء المفترض أو البناء الذي يُعَدُّ غير قابل للتحقيق يختلف تمام الاختلاف عن البناء الواقعي، وإذا كان بروار يصف التجربة التي تبدأ من بناء مفترض لا يمكن أن يتحقق، فليس من المدهش أن نجد آخرين يخبرون عن أن هذه التجربة ليست واضحة بذاتها. بل يذهب بعض الحدسيين إلى أن الافتراض غير القابل للتحقيق لا يمكن أن يكون له معنى واضح. وهكذا بُرهن على أنَّ البناء غير واضح بذاته من خلال النقاش الناتج عن الآراء المتضاربة، وأن التقرير الذي لا يكون تقريرًا عن بناء واضح بذاته لا يمكن أن يكون- بمقتضي التعريف- نظرية رياضية حدسية. (السرياقوسي، 1982م، ص ص 448، 449).

يصدق الشيء نفسها على كل التقريرات التي يظهر فيها النفي الحدسي؛ لأنَّها حسب قول هايتنج تعد القضية المثبتة "ق" "أني قد نجحت في تنفيذ البناء "a" في ذهني"، أمَّا القضية المنفية لها "¬ ق"، فهي "لقد نجحت في تنفيذ بناء آخر "b" في ذهني"، ولكن التمسك بهذا البناء الثاني بافتراض البناء الذهني الأول قائمٌ، يؤدي إلى التناقض (Heyting, 1971, P. 19). ولما كانت تقريرات الرياضيين الحدسيين عن هذا النوع من التجربة متناقضة، فلا يمكن أن توجد تجربة قابلة للتعبير عنها بواسطة النفي الحدسي واضحة بذاتها. (السرياقوسي ، 1982م، ص 449).

من هنا، فإنَّ النتيجة التي انتهي إليها براور هي أنَّ النفي بقضية عامة لا يمكن النظر إليه عمومًا على أنه ينطوي على أي معنى (ديمتريو، 1997م، ص 98)، وإلَّا تصبح الرياضيات الحدسية التي حثنا براور عليها بلا معنى، إذ تُعَدُّ الافتراضات والتناقضات في اللغة وليست في الواقع، سواء أُنْشِئ الواقع الرياضي أم لا؛ لذا فمن الضروري أن ترحل فكرة النفي، وبالتالي تخلي المنطق الحدسي بالفعل عن الكثير من الرياضيات التقليدية التي تتضمن نفيًا. (Brown, 1999, P. 99).

من هنا، فإنَّ القضية "ق" أو "¬ ق" لا يعدها الحدسيون مبدأً صادقًا صدقًا مطلقًا، ولا يقبلونه مبدأً عامًا من مبادئ منطق الرياضيات؛ وذلك لأن الحدسيين يريدون منطقًا ورياضيات ليس فيهما نفي على الإطلاق. (السرياقوسي ، 1982م، ص ص 444، 445).

إذا كان براور أكد عدم وجود ضرورة مباشرة للنفي، فإنَّ الآثار المترتبة على ذلك، هي التشكيك مباشرًا في استخدام قاعدة النفي المزدوج Double Negation؛ لأنَّ ما يصدق على القضايا التي تتخذ الصورة "¬ ق" يصدق على القضايا التي تتخذ الصورة "¬ ¬ ق"؛ أي: النفي المزدوج. (السرياقوسي ، 1982م، ص 449).

وعلى الرغم من أن قاعدة الاستدلال الخاصة بالنفي المزدوج، التي تعني أن من ~ ~ Φ نستنتج Φ، تعد صحيحة في كل الأنساق التقليدية، فإنَّها غير صحيحة في المنطق الحدسي. فبالنسبة إلى الحدسي، بما أن النفي يشير إلى التفنيد، فإنَّ ¬ ¬ Φ تعني "قد تم تفنيد Φ وهي مفندة". ولكن لنفترض أننا بطريقة ما نرفض الرأي القائل بأن القضية القائلة بأن "نابليون تناول وجبة الإفطار في 9 سبتمبر 1807م" قد تم تفنيدها، هذا لا يعادل إثبات هذه القضية، وإنَّما قد تثبت جهلنا فقط. وبالتالي من "¬ ¬ Φ" لا يستنتج الحدسي بشكل عام "Φ"، ويعد هذا انحرافًا جذريًا عن المنطق التقليدي القائم على مفهوم الصدق. (Nolt, 1997, P. 429).

يمكن توضيح أكثر لقاعدة النفي المزدوج في المنطق التقليدي من خلال المثال الآتي: "من الكذب القول إن جون لا يحب كرة القدم، يلزم عن ذلك "أنَّ جون يحب كرة القدم"؛ أي: (~~ ق ⊂ ق). ومن وجهة نظر حدسية، فهذا الأمر غير مقبول؛ لأنه بحكم التعريف، يجب أن تكون هناك معلومات كافية للبرهنة على ذلك. وفي هذه الحالة، فإنَّ المعلومات المعروفة لدينا، هي من الكذب القول إن جون لا يحب كرة القدم، ولكن ليس لدينا معلومات كافية لاستنتاج أن جون يحب كرة القدم. فبالنسبة إلى الحدسي، إذا كانت "¬ a" كاذبة إذن يجب أن تكون "a" صادقة، ليست أمرًا مقبولًا.

في عام 1923م قدم براور مقالة بعنوان "انشقاق الحدسية من المفاهيم الأساسية للرياضيات"Intuitionistic Splitting of the Fundamental Notions of Mathematics، بتحليل النتائج التي ترتبت على وجهة نظره حول مفهومه للنفي، الذي وصفه على أنه تناقض للمنطق السليم، قائلًا: "**إذا كان المنطق التقليدي يفترض الصحة Correctness والمحال بالنسبة لكل صفة بوصفهما بديلين فقط، إذن يفترض تكافئ الصحة ومحال المحال. وإذا كان المنطق الحدسي يرى أن محال المحال يلزم عن الصحة، إلا أنه ليس مكافئًا للصحة**". (Brouwer, 1998, P. 286).

من خلال ذلك يتضح لنا أن براور لم يُعد قاعدة النفي المزدوج أو قاعدة محال المحال حتى الآن بوصفها بناءًا رياضيًا؛ إذ أنه يرفض هذه القاعدة وتكافئها بالصدق كقاعدة منطقية تطبق على لغة الرياضيات الحدسية. وبالتالي، تُعد هذه المقالة تفنيدًا للنتائج الرئيسة للنفي التقليدي.

لذلك، ترجع إحدى نقاط الخلاف الرئيسة بين المنطق الحدسي والمنطق التقليدي إلى غياب قاعدة النفي المزدوج. (غيتمانوفيا ، 1989م، ص 356). فالمنطق التقليدي يفترض قاعدة النفي المزدوج، في حين أن المنطق الحدسي لا يمكنه تقرير ذلك؛ لأنَّ النفي المزدوج لا يتساوي – في المنطق الحدسي- مع الإثبات؛ أي: (¬ ¬ ق≠ ق)، أو بعبارة أخرى، إن النفي المزدوج لا يلزم عن الصدق.

وإذا كان أرسطو قد مَيَّزَ بين البرهان المباشر والبرهان غير المباشر، مؤكدًا كيفية الحصول على البرهان المباشر؛ أي: من خلال قواعد الاستدلال، في حين أن البرهان غير مباشر، وليكن لـ "a"، يعني على فرض أن "~ a" منفية، ومن خلال هذا الافتراض يتضح أنه يؤدي إلى إثبات "~ ~ a ⊂ a"؛ أي: أن "a" متساوية مع نفي نفي "a". إلاَّ أنَّ التفسير الحدسي للنفي، يرفض البرهان غير المباشر لـــ A ¬ ¬ (Granström, 2011, P. 156)، الذي يعني بالنسبة للقضية "a"، فإنَّ البرهنة على"لا-لا- a" ليست كافية لاستنتاج "a"؛ لأن "a ¬ ¬" لا تلزم عن "a".

بتعبير آخر، إذا كان براور يشرح النفي من خلال ربطه بالبناء الذي يؤدي إلى المحال، فإن قضية النفي المزدوج "p ¬ ¬" تُقرَّر فقط في حالة إذا كان البرهان على أن "p¬" أدى إلى المحال، وبذلك فإن "p ¬ ¬" ستكون بمعنى محال المحال. وبناء على ذلك، **هل تعد قاعدة النفي المزدوج صحيحة؟** عندما نفكر قليلًا سيتضح أنه عند إثبات صحة هذه القاعدة، يجب استبدال أي "ترادف" من "p ¬ ¬" إلى "p". وهذا يعني أنَّ أي برهان على محال المحال لـــ "p" يجب أن يكون قابلًا للتحويل إلى برهان مباشر لــ "p". ونظرًا لعدم وجود طريقة معروفة لتحويل البراهين غير المباشرة إلى برهان مباشر، فليس كل ترادف من "p¬ ¬" قابل للاستبدال إلى"p". وعلى ذلك، وفقًا لمعايير براور، يوضح أن قاعدة النفي المزدوج ليست قاعدة منطقية صحيحة. وبذلك تُفَسَّرُ حجة براور بسهولة على أنَّها تطالب بحذف قاعدة النفي المزدوج. (Placek, 1999. PP. 69, 70).

بذلك يتضح لنا، أسباب عدم قبول أنصار المنطق الحدسي البرهان غير المباشر، هو مطالبة المنطق الحدسي بالبرهان ذي الطابع البنائي. وإذا كان الحدسي يقبل القاعدة القائلة بأن أي قضية تنطوي على

تناقض يجب أن تكون كاذبة، هذا لا يعني السماح باستخدام مبدأ الثالث المرفوع، ولا النتيجة اللازمة عنه؛ وهي أن كذب كذب القضية "p" يلزم عن "P" (Wilder, 1965, PP. 256, 257).

بتعبير براور كتب يقول: "**إن المفهوم الحدسي للرياضيات لا يرفض مبدأ الثالث المرفوع فقط، ولكن أيضًا الحالة الخاصة الواردة في مبدأ التبادل للأنواع التامة the Principle of the Reciprocity of the Complementary Species، المبدأ القائل أن صحة الصفة، بالنسبة لكل نسق رياضي، تلزم عن استحالة إثبات محال هذه الصفة**". (Brouwer, 1998, P. 286).

يؤكد براور من خلال هذا النص رفضه لمبدأ التبادل التام التقليدي كحالة خاصة من مبدأ الثالث المرفوع، حيث يرفض التكافؤ التقليدي للنفي المزدوج والصدق. ولكن لم يفسر براور النفي على أنه كذب، بل على أنه استحالة، والاستحالة هنا تعادل المحال، حيث استخدمه بدلًا من المحال.

نتيجة لرفض أنصار المنطق الحدسي مبدأ الثالث المرفوع ترتب على ذلك رفضهم لقاعدة النفي المزدوج، التي تعني نفي النفي إثبات أو كذب الكذب ينتج عنه الصدق، فكذب كذب القضية "p" يلزم عن "p"، فإذا كان كذب "p" يؤدي إلى الكذب، فإن تكذيب كذبها يكون صادقًا. وقد عَبَّرَ رسل عن مثل هذا بالصيغة الآتية: $p \supset (\sim p) \sim \vdash$ (محمد، 1982م، ص 18)؛ أي: أن "p" متساوية مع "نفي نفي p"؛ أي: أن $(\sim p) \sim \equiv p$. (محمد، 1982م، ص 19).

أما عن رأي أنصار المنطق الحدسي، فقد كتب براور، في هذا الصدد: "**مع حذف مبدأ الثالث المرفوع، يصبح البرهان غير المباشر؛ أي: البرهنة على الصفة من خلال محال المحال، في شكلها العام غير صحيح أيضًا**". (Brouwer, 1998, P. 52).

بذلك تصبح قاعدة النفي المزدوج (~ ~ ق ≡ ق) ليست صحيحة في المنطق الحدسي، تلك القاعدة الناجمة عن اللزوم المزدوج (~ ~ ق ⊂ ق)، و(ق ⊂ ~ ~ ق). لكن المنطق الحدسي الذي يقبل اللزوم (ق ⊂ ~ ~ ق)، لا يقبل اللزوم العكسي (~ ~ ق ⊂ ق). وبعبارة آخري، فهو لا يقبل أن تكون البرهنة على كذب قضية كافية لإثبات أن نقيضتها صادقة، إذ لا يمكن أن نكون واثقين من صدق هذه - حسب رأي براور- إلَّا ببناء العنصر الذي تفقده القضية المنفية (رور، 2008م، ص121).

إذا كان براور قد اعترض على عمومية مبدأ الثالث المرفوع بوصفه مبدأ يدعي بشكل قبلي أن كل مشكلة رياضية لها حل، فإنَّ الأمر كذلك بالنسبة لعمومية قاعدة النفي المزدوج بوصفها تأكيدًا على أنها تنطبق على كل قضية رياضية متسقة (Moschovakis, 2009, P. 77)؛ لذا تعد هذه القاعدة من القواعد المرفوضة- أو التي يجب تقيدها- من قبل أنصار المنطق الحدسي؛ وعلى ذلك فإنَّ هذا الرفض قد جاء مرتبطًا بطبيعية الحال بأفكار الحدسيين المنطقية (عبد العزيز، 2013م، ص 16).

من الواضح أنَّ رفض قاعدة النفي المزدوج لها تأثير في ما يمكن تقريره، وخاصة، في تقرير حالات مبدأ الثالث المرفوع. فمن خلال عدم التسليم بهذه القاعدة، لا يمكن تقرير "$p \vee \neg p$". وبالتالي قد تظهر الاعتراضات على صحة مبدأ الثالث المرفوع لرفض قاعدة النفي المزدوج. غير أن كما ظهر في مقالات براور، كان اهتمامه الرئيس هو رفض مبدأ الثالث المرفوع، وليس قاعدة النفي المزدوج؛ لهذا السبب نحتاج إلى تحليل اعتراضاته على المبدأ، ويفترض براور أنَّ "$p \vee q$" لا يمكن تأكيده إلَّا إذا كان يوجد بناء يتوافق مع "p"، أو وجود بناء يوضح كيف يمكن إثبات "q"، أو كليهما. يؤدي هذا في الحال إلى نتيجة مفادها أنه يمكن تقرير "$p \vee \neg p$" فقط إذا كان من الممكن إثبات أحد البدائل: "p" أو "$\neg p$". وبما أن هناك قضايا لا يُعرف عنها كيف يمكن إثباتها، ولا كيف يمكن استنتاج تناقض من الافتراضات التي تفترضها، فلا نستطيع تقرير "$p \vee \neg p$" (Placek, 1999, P. 70). ونتيجة لرفض قاعدة النفي

المزدوج، فإن بعض مبادئ المنطق التقليدي تتوقف عن كونها صحيحة كليًّا، وعلى الأخص مبدأ الثالث المرفوع. (Placek, 1999, P. 74).

لذا نستطيع القول: إن من أسباب رفض الحدسيين لمبدأ الثالث المرفوع ارتباطه برفضهم بقاعدة حذف النفي المزدوج فنفي نفي قضية ليس بالضرورة مكافئًا للقضية نفسها. صحيح أن صدق قضية يؤدي إلى صدق نفي نفيها، ولكن العكس ليس صحيحًا بالضرورة. ومادام رفض الحدسيين لمبدأ الثالث المرفوع يستند فقط إلى رفضهم لقاعدة حذف النفي المزدوج فإنهم ملزومون بقبول المبرهنة: $\vdash \sim\sim(p \vee \sim p)$؛ أي: أنهم لا ينكرون نفي نفي مبدأ الثالث المرفوع، ولكن هذا لا يعني عندهم القبول التلقائي بالمبرهنة: $\vdash (p \vee \sim p)$. (أبو النور، 1993م، ص 293).

من هنا ترجع عدم صحة قاعدة النفي المزدوج إلى أنها ستؤدي مرة أخرى من المبرهنة $\neg\neg(p \vee \neg p)$ إلى إثبات مبدأ الثالث المرفوع $(p \vee \neg p)$ (McCarty, 2005, P. 360)؛ لذلك يرفض الحدسي قاعدة النفي المزدوج حتى لا يمكن إثبات مبدأ الثالث المرفوع.

قد يرى رجل المنطق التقليدي أنه لا فرق بين المبرهنتين، ولكن الفرق كما هو واضح يعتمد على قاعدة حذف النفي المزدوج. إذا قبلنا هذا الرأي انتهي الاختلاف بين المنطق الحدسي والمنطق التقليدي، ولكن الحدسيين يصرون على أن هناك اختلافًا كبيرًا بين المبرهنتين؛ نظرًا لاختلاف مفهوم النفي في المنطقين، فتعريف النفي التقليدي يستند إلى شروط الصدق، أمَّا النفي الحدسي فيعتمد على فكرة التفنيد؛ أي: أننا لا نقبل نفي قضية إلَّا إذا كان هناك تفنيدًا لها؛ أي برهان على كذبها. ولهذا فإن تفنيد أي "نفي النفي" قضية ليس بالضرورة إثباتًا لها. (أبو النور، 1993م، ص ص 293، 294).

الخطوة المفاجئة في المقالة التي قدمها براور عام 1923م، هي أنها تسمح ببعض الاعتراف بالنفي المزدوج، حيث لم يستغنِ براور عن النفي تمامًا، فقد أدى بحثه الأولي في طبيعة الرياضيات إلى الاقتناع بضرورة وجود النفي بوصفه عنصرًا أساسيًّا في البناء، وإلى تفسير يمكن استيعابه في مفهومه للرياضيات البنائية. فإذا كان قد رُفض حتى الآن بوصفه لا معنى له، إلَّا أنه قد قُدِّمّ دون مزيد من التوضيح على أن "محال المحال" يسمح له بمكان في المنطق الحدسي.(Stigt, 1990, PP. 239-258).

على الرغم من أن براور لم يقدم نسقًا للمنطق الحدسي، فإنه أثبت نظرية منطقية جديدة، **فما هذه النظرية؟ وهل تُعَدُّ بديلًا عن قاعدة النفي المزدوج؟**

قام براور بإثبات نظرية منطقية جديدة قائمة على اقتراح بديل للنفي في المنطق التقليدي والنفي المزدوج، وهي $\neg\neg\neg A \equiv \neg A$، التي تعني إن استحالة إثبات المحال محال يكافئ المحال Absurdity -of- Absurdity –of - Absurdity is Equivalent to Absurdity، مبرهنًا عليها بقوله: "**أولًا- إذا كانت الصفة y تلزم عن الصفة x، إذن من المحال أن تلزم عن محال x. وبما أنَّ محال المحال يلزم عن الصحة، فيجب أن يلزم المحال عن استحالة إثبات محال المحال. ثانيًا- بما أنَّ صحة الصفة تلزم عن استحالة إثبات محال هذه الصفة، فإنَّ صحة المحال؛ أي المحال يجب أن يلزم عن استحالة إثبات محال المحال**". (Brouwer, 1998, P. 287).

من خلال ذلك يتضح لنا أن براور قد حاول أن يدخل مجال المناطقة بنفسه، فلم يعد دوره قائمًا على رفضه واعتراضه لبعض المبادئ المنطقية فقط، بل أثبت نظرية جديدة مستخدمًا قياس الإثبات بالإثبات Modus Ponens، الذي أثبت من خلاله أن $(\neg\neg\neg a \supset \neg a)$. والنتيجة الطبيعية لهذه النظرية هي أن تظل الصفات السلبية التي يُعَبَّرُ عنها براور بالمحال فعَّالة، ويصبح التعبير عن تبادل

المحال في الرياضيات الحدسية إما بالمحال أو باستحالة إثبات المحال، على عكس الرياضيات التقليدية التي يُعَبَّرُ عن المحال إما بالصحة أو بالمحال.

إذا كنا قد أوضحنا موقف براور من مبدأ التبادل التام ورفضه له، إلا أنه يؤكد استمرارية القانون المعاكس له، وهو $(a \supset \neg\neg a)$. فقد عده واضحًا وصحيحًا مستخدمًا إياه في إثبات استدلاله $(\neg a \supset \neg\neg\neg a)$، فمن خلال إثبات أن a منفية يصبح $\neg a$ مكافئة لـ $\neg\neg\neg a$. (Franchella, 1995, P.315).

هكذا، يتضح لنا أنَّ أنصار المنطق الحدسي يؤكدون أن منطقهم قائم على النفي الثلاثي، بدلًا من تأكيدهم النفي المزدوج (Granström, 2011, P. 156)؛ أو بتعبير آخر، إن إثبات هذه النظرية قائم على إلغاء قاعدة النفي المزدوج.

يمكن توضيح النتائج المترتبة على تحليل براور لمفهوم النفي على النحو الآتي (Zach & Badesa, 2010, P. 103):

1- إن محال المحال- وفقًا للاتجاه الحدسي- يلزم عن الصحة وليس العكس.
2- طرح براور نظرية منطقية جديدة، وهي "استحالة إثبات المحال محال يكافئ المحال".

في النهاية، يمكن القول إن الاختلاف الأساسي بين المنطق التقليدي والمنطق الحدسي يرجع إلى اختلاف فهمهم للنفي، الأمر الذي ترتب عليه قبول المنطق التقليدي لقاعدة النفي المزدوج ورفض المنطق الحدسي لها. ولكن، ذلك لا يعني أن أحدهما على صواب والآخر على خطأ، بل من الممكن أن يكون كل منهما صحيح في استخدام "النفي" الخاص به، بحيث يمكن للمرء أن يكون لديه لغة مع نوعين من "النفي"، إحداهما كلاسيكي والآخر حدسي. (Hossack, 1990, PP. 210, 211).

الخاتمة ونتائج البحث:-

بدايةً، لا بد من توضيح نقطة مهمة؛ وهي أن موقف المنطق الحدسي من مبادئ المنطق التقليدي يرجع بالكامل إلى هايتنج؛ إذ إنه نتاج شخصيته وتطوره. فقد عَمَلَ على تجميع أعمال براور، وجعل أفكاره أكثر سهولة، ويسر؛ بحيث تكون معروفة على نطاق واسع، كما نجح في تحديد الشكل الراسخ للمنطق الحدسي. فقد كان لديه الصفات التي جعلت من هايتنج في عام 1930م متحدثًا باسم حدسية براور.

ومِمَّا سبق نستنتج أن هدف الاتجاه الحدسي هو السعي نحو الحصول على الدقة الرياضية، تلك الدقة التي كانت في رأي براور وهايتنج من خلال قابلية البراهين البنائية فقط. وعلى ذلك، توجهت سهام النقد نحو المنطق التقليدي، الذي اعتمد في فهمه للقضية الرياضية على مفهوم الصدق، على عكس المنطق الحدسي الذي يرى ضرورة استبدال مفهوم قابلية البرهان بمفهوم الصدق.

بالإضافة إلى ذلك، اتضح لنا أن براور قد رفض مبدأ الثالث المرفوع وتجاوزاته من أجل تحقيق حملته لإصلاح الرياضيات وتطويرها. فإذا كان المنطق الحدسي رفض التطبيق الأعمى لمبدأ الثالث المرفوع وأكد صحته فقط في مجال الأنساق المتناهية، فإنه كان من أجل التخلص من مفارقات المجموعات اللامتناهية، والحد من فكرة أن كل مشكلة رياضية لها حل، وتأكيد أسبقية الرياضيات عن المنطق، وعلى ذلك يتضح الاختلاف الكبير بين المنطق التقليدي والمنطق الحدسي.

وبِنَاءً على رفض المنطق الحدسي لمبدأ الثالث المرفوع رُفِضَتْ قاعدة النفي المزدوج، تلك القاعدة التي يسمح من خلالها بالانتقال من النفي المزدوج إلى الصدق. ذلك الأمر الذي لا يقبله الحدسي؛ إذ إن البرهنة على كذب قضية ليس كافيًا لإثبات أن نقيضتها صادقة.

على الرغم من أن براور أكد مررًا وتكررًا ضرورة الفصل بين الرياضيات واللغة من ناحية والرياضيات والمنطق من ناحية أخرى، وبالتالي حاول طوال حياته أن يتجنب استخدامهم، ربما بسبب عدم الثقة بهما، فإن هذا لا يعني أنه لم يؤمن بإمكانية وجود مكان مفيد للمنطق في الرياضيات الحدسية. والدليل على ذلك، عندما نشر مقالته التي صُدرت عام 1923م، يبدو أن هناك بعض التحولات في وجهات نظر براور حول المنطق. فعلى الرغم من أنه أكد عدم وجود النفي أو النفي المزدوج في الرياضيات، فإنَّه رجع وقدم جزءًا فرعيًّا من قاعدة النفي المزدوج $a \equiv \neg \neg a$، وعدها نظرية صحيحة حدسيًّا، وهي $\neg a \equiv \neg \neg \neg a$.

إذا كان براور لم يلجأ إلى استخدام لغة صورية؛ نظرًا لأنه يعد الرياضيات عقلية لا تهتم باللغة الصورية. ورغم أن هذا الموقف يُعَدُّ ضارًا بتطوير المنطق الحدسي، فإنه لم يمنع الآخرين- مثل هايتنج وغيره- من التفكير في إضفاء الطابع الصوري على أجزاء من الحدسية. فقد وافق على إضفاء الطابع الصوري على المنطق الحدسي لهايتنج ودعم مقالته عن "القواعد الصورية للمنطق الحدسي" في عام 1930م. وهذا ما يؤكد لنا أن تلك المقالة لم تكن خطوة ثورية من هايتنج، بل كان مدعومة من قبل براور, فقد جاءت في وقت انسحب فيه براور من النقاش العام؛ مما سمح لهايتنج ببقاء القضية الحدسية على قيد الحياة، وتطوير نسخته الخاصة من الاتجاه الحدسي.

وبَنِاءً على كل ما سبق ، فإنَّ إعادة تفسير مبدأ الثالث المرفوع أدى إلى ضرورة وجود منطق جديد يختلف عن المنطق التقليدي؛ للتعبير عن آراء الاتجاه الحدسي وأفكاره. ولكن لم يقدم براور نسقًا منطقيًا، بل ترك الأمر لهايتنج الذي عمل على ولادة منطق بديل للمنطق التقليدي، منطق لا يضع مبدأ الثالث المرفوع ضمن بديهياته، ذلك هو "المنطق الحدسي"، الذي يتميز بألَّا يكون مبدأ الثالث المرفوع مبرهنة Theorem من مبرهنات النسق الحدسي، ولا يمكن البرهان عليه في النسق البديهي للمنطق الحدسي الذي أقامه هايتنج؛ لذلك حاول هايتنج تأسيس نوع جديد من المنطق مستوحى من الرياضيات، منطق يرفض الصحة المطلقة لمبدأ الثالث المرفوع.

حواشي البحث

([1]) الاتجاه المنطقي أو اللوجستيقي: الذي أسسه جوتلوب فريجه Gottlob Frege (1848- 1925)، وطوره برتراند رسل Bertrand Russell (1872-1970) والفرد نورث وايتهيد Alfred North Whitehead (1861-1947).

([2]) الاتجاه الصوري أو الأكسيوماتيكي Axiomatism الذي أسسه ديفيد هلبرت David Hilbert (1862-1943).

([3]) كلمة الحدس بالانجليزية Intuition مشتقة من اللاتينية Intuitus وتعني المعرفة الحقيقية البيّنة مهما تكن طبيعتها. (لالاند، 2001، ص 701).

أما في اللغة العربية فيعني الإدراك المباشر لموضوع التفكير، وله أثره في العمليات الذهنية المختلفة، وفيما يتعلق بالإدراك الحسي المباشر فيسمي "حدسًا حسيًّا" Intuition Sensible، حيث يكون أساسًا للبرهنة والاستدلال، ويسمى "حدسًا عقليًّا" Intuition Rational، فبالحدس يمكن أن تدرك حقائق التجربة، وبه تتكشف لنا أمور لا سبيل إلى الكشف عنها بسواه، وهذا هو أشبه بالرؤية المباشرة والإلهام. (المعجم الفلسفي الصادر عن مجمع اللغة العربية، 1983، ص ص69، 70).

وعلى ذلك، فإن للحدس معاني متعددة، فيمكن تعريفه على أنه الفهم، حيث إنه يتعامل مع ما هو واضح بالنسبة للعقل. (Gray, 1992, P. 239).

هذا عن معنى الحدس لغويًّا وأنواعه، ولكن إذا تسألنا **هل يمكن أن يستند المنطق إلى الحدس ؟ فماذا تكون الإجابة؟ وما الدور الذي يقوم به ؟** إن الإجابة عن هذا السؤال يمكن أن نلتمسها عند أرسطو (384ق.م -322 ق.م) - بوصفه الواضع الحقيقي لعلم المنطق- حيث كان أرسطو يؤمن بشكل عام بتكامل طرق المعرفة الإنسانية، فإنه يؤمن أن لكل منهما دورًا تؤديه، ويتلائم هذا الدور مع موضوع معين، فإذا كانت الحواس هي أساس المعرفة بالعلم الطبيعي المادي الخارجي، فإن الحدس هو أساس إدراك القوانين المنطقية؛ وبالتالي فإن المنطق يقوم على حدس مبادئه. (النشار، 1995م، ص ص 98- 100).

وتوجد صور كثيرة للحدس العقلي، وهي: 1- **الحدس المصقول Experienced Intuition**: هذا الحدس المصقول هو الذي يلتقي به العالم الطبيعي ذو الثقافة الرياضية الممتازة في معمله. ويمثل القمة في عدد كبير من التجارب المعملية التي كثيرًا ما يلجأ العالم إلى المعادلات الرياضية؛ لكي يوضحها. 2- **الحدس الرياضي Mathematical Intuition**: إن الحقائق لها عالم خاص بها، وهذا العالم ليس من وضع العالم الرياضي، بل يخضع لضرورة ما، ليست هي الضرورة التجريبية بل ضرورة من نوع خاص. سنعرض مثالًا مأخوذًا من علم الهندسة نوضح من خلاله معنى هذه الضرورة والحدس الرياضي الذي يقتضيها، فإذا بدأنا من الفرض القائل بأن المكان مستوٍ، كما بدأ إقليدس، فإنه استخلص منه الحقيقة القائلة: "لا يمكن أن نرسم من نقطة واحدة سوى خط مستقيم واحد مواز لخط معين"، هذه الحقيقة التي وضعها إقليدس على شكل مصادرة حقيقية ضرورية إذا بدأنا من الفرض القائل بأن المكان مستوٍ. والآن، هل نستطيع أن نسمي هذه الحقيقة "حقيقة حدسية"؟ إن الحدس هنا لا يتناول هذه الحقيقة، ولا يتناول الفرض القائل بأن المكان مستو، بل يتناول العلاقة بين الاثنين. فالحدس الرياضي إذن ليس حدسًا لحقائق بل حدسًا لعلاقات. والضرورة هنا ليست وصفًا لهذه المصادرة، بل وصفًا للعلاقة القائمة بينها وبين الفرض الذي بدأنا منه؛ ولذلك فإذا كان لا بُدَّ من أن نصف المعرفة الرياضية بأنها معرفة ضرورية، فيجب ألا يغيب عن بالنا أن هذا الوصف لا ينطبق على الحقائق الرياضية، بل على العلاقات الرياضية، فهي وحدها التي تتصف بالثبات والضرورة. أما الحقائق الرياضية فتتغير؛ وبذلك فإن الحدس الرياضي هو إدراك الذهن لهذه العلاقات الضرورية. 3- **الحدس العقلي الحسي البسيط Simple Sensory Rational Intuition**: إن الحدس العقلي الحسي البسيط هو الذي يقوم عليه المنطق الأرسطي كله، فهو عقلي من حيث إنه تصور في الذهن، ولكننا لا نستطيع أن نفهم هذا التصور الذهني إلا على الطبيعة، وفي قلب التجربة الحسية ومن خلال الأشياء الجزئية التي يتحقق فيها. وبذلك يُعَدُّ الحدس في المنطق مصدرًا من مصادر المعرفة اليقينية. (هويدي، د. ت، ص ص 126- 134).

([4]) التقرير Assertion هو الحكم بصدق القضية في الإيجاب أو السلب، وقد أدخلت فكرة التقرير وعلامتها " ├ " في منطق فريجه في عام 1879، وقُبلت بعد ذلك من قبل واضعي نسق الـــ "برنكيبيا". (صليبا، 1982م، ص 325).

([5]) مصطلح الهدف أو النية صاغها علماء الظاهريات أو الفنومولوجيا، والمقصود به إعمال الفكر في موضوع معين، أو بتعبير آخر يُعَّد الهدف غايةٍ يرمي المرء إلى بلوغها. (لالاند، 2001، ص ص 691- 692) .

([6]) يرمز لرابطة الفصل بالرمز "v"، وتقوم بالربط بين قضيتين، فإذا كان لدينا القضيتين "ق"، و"ل" وأردنا إجراء الفصل لهما ستكون الصياغة الرمزية، هكذا: (ق v ل) وتقرأ أما أن تكون القضية "ق" أو القضية "ل". (النويهي، 1987م، ص 39).

([7]) يرمز لإجراء العطف بالرمز "."، فإذا كان لدينا القضيتين "ق"، و"ل" فإن الصياغة الرمزية لقضية العطف المركبة منهما تكون هكذا: (ق. ل)، وتقرأ "ق ول". (النويهي، 1987م، ص41).

([8]) يرمز لرابطة اللزوم بالرمز "⊂"، ويكون اللزوم بين قضيتين، وتكون الصياغة المعبرة عن قضية اللزوم، هكذا: (ق⊂ ل)، وتقرأ: إذا كانت القضية "ق" كانت القضية "ل". (النويهي، 1987م، ص 42).

([9]) يرمز هايتنج للنفي برمز "¬" تمايزًا له عن النفي التقليدي "~".

([10]) تلك الصيغة التي تُفسر على أنَّ "p" متغير لقضية رياضية، فبالنسبة لكل "p" إما أن تكون صادقة أو كاذبة.

([11]) يُعد الاستقراء نوعًا من أنواع الاستدلال، حيث أن الاستدلال نوعان: استدلال مباشر، واستدلال غير مباشر. الأول هو استنتاج قضية من قضية واحدة، وهذا بدوره أنواع مثل العكس المستوي، ونقض المحمول، وعكس النقيض وما إلى ذلك. أما الاستدلال غير المباشر فهو نوعان أساسيان هما القياس والاستقراء. والقياس استنتاج قضية من قضيتين لا أكثر ولا أقل. أما الاستقراء فهو استنتاج قضية من أكثر من مقدمتين. وليس الاستقراء نوعًا واحدًا وإنما عدة أنواع، أشهرها الاستقراء التام، والاستقراء الناقص. ويتميز الاستقراء التام عن الاستقراء الناقص في أنه يحتوي في مقدماته إحصاء كاملًا لكل الأمثلة التي تشهد على صدق النتيجة، بينما الاستقراء الناقص تحتوي مقدماته على عددًا كبيرًا من الأمثلة الجزئية ولا يحصيها جمعيًا. (زيادة، 1986م، ص ص59، 60)

هذا عن الاستقراء وأنواعه، ولكن ماذا عن الاستقراء الرياضي؟ يعد الاستقراء الرياضي صورةً من صور الاستقراء التام، ففي حال قيام علاقة مع حد من حدود صنف ما، يكمن الاستقراء في توسيع هذه العلاقة وجعلها شاملة أكثر فأكثر، وبموجب اللزوم المتبادل لكل حدود هذا الصنف (سواء كان عدد هذه الحدود محددة أم غير محددة)، مثلًا: في حال وجود مبرهنة لــ ع = 1، نبين أنه إذا كان صحيحًا بالنسبة إلى ع – 1، كان صحيحًا بالنسبة إلى ع، ويستفاد من ذلك أنه صحيح بالنسبة لكل الأعداد الكاملة. (لالاند، 2001، ص 667).

([12]) العدد التام هو عدد صحيح يساوي مجموع عوامله مع استبعاد العدد نفسه؛ فمثلًا العدد 28 هو عدد تام؛ لأن جميع عوامله فيما عدا العدد نفسه هي{14 ,7 ,4 ,2 ,1} ومجموعهما يساوي العدد 28. ويوصف العدد غير التام بأنه معَيب أو فائض على حسب ما إذا كان مجموع هذه العوامل أقل أو أكبر من العدد. (معجم الرياضيات الصادر عن مجمع اللغة العربية،2001، ص209).

([13]) كان براور بحاجة إلى برهان يؤكد بطلان مبدأ الثالث المرفوع المقبول لإسكات منتقديه في أوائل العشرينات، وهو مثال مضاد من شأنه أن يفند الافتراض القائل بأنَّ كل مشكلة رياضية قابلة للحل..(Stigt, 1990, PP. 252)

([14]) الــ π "الباي": ثابت في الرياضيات؛ له قيمة تقريبية في النظام العشري، ولكن لا يمكن تحديدها بدقة؛ لأن من المستحيل معرفة كل الأعداد العشرية بعد النقطة الخاصة بالثابت "باي"، حيث أن هذه الأعداد تعد لامتناهية بعد النقطة العشرية من الثابت "باي".(Crilly, 2007, P. 31).

([15]) في زمن براور كان يعتقد أن ظهور العدد سبعة كان نادرًا نسبيًا في النظام العشري لــ π. (Goodstein, (1971, P. 25.

قائمة المصادر والمراجع:

أولًا:- قائمة المصادر والمراجع العربية.

1- أبو النور، أحمد أنور، (1993)، *المنطق الطبيعي دراسة في نظرية الاستنباط الأساسية*، القاهرة، دار الثقافة للنشر والتوزيع.

2- الجنابي، أسعد قادر، (2010)، *المنطق غير التقليدي وتطبيقاته: نظري وتمارين محلولة*، سوريا، منشورات دار علاء الدين.

3- رسل، برتراند، (1958)، *أصول الرياضيات*، الجزء الأول، ترجمة محمد مرسي أحمد، مراجعة: أحمد فؤاد الأهواني، القاهرة، دار المعارف.

4- علي، حسين، (2003)، *مبادئ المنطق الرمزي*، القاهرة، دار قباء للطباعة والنشر والتوزيع.

5- علي، حسين، (2015)، *المنطق وفن التفكير*، القاهرة، أم القرى للطباعة والنشر والتوزيع.

6- ديمتريو، (1997)، *تاريخ المنطق: قراءات حول التطور المعاصر للمنطق الرياضي*، الجزء الرابع، ترجمة وتعليق ودراسة: د.إسماعيل عبد العزيز، القاهرة، دار الثقافة للنشر والتوزيع.

7- النويهي، سهام، (1987)، *أسس المنطق الرياضي: رؤية حديثة*، القاهرة ، دار النهضة.

8- عبد العزيز، عابر، (2013)، *الأبعاد الحدسية لمنطق حساب القضايا عند آرند هايتنج*، مجلة كلية الآداب بقنا، جامعة جنوب الوادي، العدد 41، ص ص1-41.

9- محمد، علي عبد المعطي، (1982) ، *المنطق الرياضي أسسه ونظرياته*، الإسكندرية، دار المعرفة الجامعية.

10- غيتمانوفيا، الكسندرا، (1989)، *علم المنطق*، لم يرد اسم المترجم، موسكو، دار التقدم.

11- رور، ماري لويز، (2008)، *المنطق والمنطق الشارح: محاولة حول بنية وحدود التفكير المنطقي*، ترجمة: محمود اليعقوبي، القاهرة ، دار الكتاب الحديث.

12- السرياقوسي، محمد أحمد مصطفى، (1982)، *المنهج الرياضي بين المنطق والحدس*، القاهرة، دار الثقافة للطباعة والنشر.

13- الجابري، محمد عابد، (2002)، *مدخل إلى فلسفة العلوم: العقلانية المعاصرة وتطور الفكر العلمي*، ط5، بيروت، مركز دراسات الوحدة العربية.

14- خليل، محمد علي محمد، (2002)، *"قانون عدم التناقض وقانون الثالث المرفوع بين المنطق ثنائي القيم والمنطق متعدد القيم"*،رسالة ماجستير غير منشورة، كلية الآداب، جامعة القاهرة.

15- مهران، محمد، (2007)، *المنطق في القرن العشرين*، ضمن كتاب *المنجزات العلمية والإنسانية في القرن العشرين: العلوم الإنسانية والاجتماعية*، تحرير فهمي جدعان ومحمد شاهين، وآخرين، بيروت ،المؤسسة العربية للدراسات والنشر.

16- النشار، مصطفى، (1995)، *نظرية المعرفة عند أرسطو*، القاهرة، دار المعارف.

17- خليل، ياسين، (2014)، *المنطق والرياضيات*، ضمن كتاب *الأعمال الكاملة: المنطق وفلسفة العلوم في التراث الغربي*، الجزء الثاني، إعداد وتقديم: مشهد العلاف، سوريا، دار نينوي للدراسات والترجمة والنشر.

18- هويدي، يحيى، (د.ت)، *منطق البرهان*، مكتبة القاهرة الحديثة.

19- الخولي، يمنى طريف ،(2000)، *فلسفة العلم في القرن العشرين: الأصول، الحصاد، الآفاق المستقبلية*، الكويت، سلسلة عالم المعرفة.

ثانيًا:- قائمة المصادر والمراجع الأجنبية:

1- Anderson, John, M., et al., (1962), *Natural Deduction: The Logical Basis of Axiom Systems*, California, Wadsworth Publishing Company.

2- Atten, Mark van., et al., (2008), *One Hundred Years of Intuitionism (1907 - 2007): The Cerisy Conference*, Berlin, Birkhäuser Verlag AG.

3- Benacerraf, Paul & Putnam, Hilary., (1983), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, New York, Cambridge University Press.

4- Brouwer, J., (1967), *On the Significance of the Principle of Excluded Middle in Mathematics, Especially in Function Theory, In From Frege to Godel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Edited by J. van Heyenoort, Cambridge, Harvard University Press.

5- Brouwer, J., (1975), *Points and Spaces", In Selected Works1:Philosophy and Foundations of Mathematics*, Edited by A. Heyting, Amsterdam, North- Holland Publishing Company.

6- Brouwer, J., (1975), *The Effect of Intuitionism on Classical Algebra of Logic In Selected Works 1: Philosophy and Foundations of Mathematics*, Edited by A. Heyting, Amsterdam, North- Holland Publishing Company.

7- Brouwer, J.,(1975), *The Unreliability of the Logical Principles, In Selected Works 1:Philosophy and Foundations of Mathematics*, Edited by A. Heyting, Amsterdam, North- Holland Publishing Company.

8- Brouwer, J., (1975), *Volition, Knowledge, Language, In Selected Works 1:Philosophy and Foundations of Mathematics*, Edited by A. Heyting, Amsterdam, North- Holland Publishing Company.

9- Brouwer, J.,(1975), *Consciousness, Philosophy and Mathematics In Selected Works 1: Philosophy and Foundations of Mathematics*, Edited by A. Heyting, Amsterdam, North- Holland Publishing Company.

10- Brouwer, J., (1975), *On The Foundations of Mathematics, In Selected Works 1: Philosophy and Foundations of Mathematics*, Edited by A. Heyting, Amsterdam , North- Holland Publishing Company.

11- Brouwer, J., (1975), *Essentially Negative Properties In Selected Works 1: Philosophy and Foundations of Mathematics*, Edited by A. Heyting, Amsterdam, North- Holland Publishing Company.

12- Brouwer, J., (1981), *Brouwer's Cambridge lectures on intuitionism*, Edited by Dalen, D. Van., New York, Cambridge University Press.

13- Brouwer, J., (1998), *Intuitionist Reflections on Formalism In From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in* *the 1920s*, Edited By Paolo Mancosu, New York, Oxford University Press.

14- Brouwer, J., (1998), *Intuitionist Set Theory In From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*, Edited By Paolo Mancosu, New York, Oxford University Press .

15- Brouwer, J., (1998), *Intuitionistic Splitting of the Fundamental Notions of Mathematics, In From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*, Edited By Paolo Mancosu, New York, Oxford University Press.

16- Brouwer, J., (1998), *Mathematics, Science, and Language*, *In From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*, Edited By Paolo Mancosu, New York, Oxford University Press.

17- Brown, James Robert., (1999), *Philosophy Of Mathematics: An Introduction to the World of Proofs and Pictures*, London, Routledge.

18- Crilly, Tony., (2007), *Mathematical Ideas: You Really Need to Know*, London, Quercus Publishing Plc .

19- Dalen, Dirk van., (2013), *L.E.J. Brouwer – Topologist, Intuitionist, Philosopher: How Mathematics Is Rooted in Life*, London, Springer.

20- Drucker, Thomas., (2008), *Perspectives on the History of Mathematical Logic* ,Boston, Birkhauser.

21- Dummett, Michael, (2000), *Elements of Intuitionism*, Second Edition, New York, Oxford University Press.

22- Gabbay, D.M., & Guenthner, F., (2002*), Handbook of Philosophical Logic*, Volume 5, New York, Springer.

23- Gabbay, Dov M., & Woods, John, (2009), *Handbook of the History of Logic: Logic from Russell to Church*, Volume: 5, North-Holland , Elsevier B.V.

24- Gillies, Donald., (1922), *Revolutions in Mathematics*, New York, Oxford University Press.

25- Goodstein, R. L., (1971), *Development of Mathematical Logic*, Great Britain, Logos Press Limited.

26- Granström, Johan Georg., (2011), *Treatise on Intuitionistic Type Theory*, New York, Springer Science-Business Media B.V.

27- Heyting, A., (1958), *Intuitionism in Mathematics, in Philosophy in the Mid-Century: A Survey*, Edited by Raymond Klibansky, Firenze: La nuova Italia, vol. 1.
28- Heyting, A., (1971), *Intutitionism :An Introduction*, Amsterdam, North- Holland Publishing Company.
29- Heyting, A., (1983), *The Intuitionist Foundations of Mathematics, In Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, Edited by Paul Benacerraf and Hilary Putnam, New York, Cambridge University Press.
30- Heyting, A., (1998), *On Intuitionistic Logic, In From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*, Edited By Paolo Mancosu, New York, Oxford University Press.
31- Jacquette, Dale., (2006), *A Companion to Philosophical Logic*, the United Kingdom, Blackwell Publishing Ltd.
32- Kleene, Stephen Cole., (1971), *Introduction to Metamathematics*, New York, North - Holland Publishing Company.
33- Kneal, William, & Kneal Martha., (1962), *The Devotement Of Logic*, London, Oxford University Prees.
34- Mancosu, Paolo., (2010), *The Adventure of Reason: Interplay Between Philosophy of Mathematics and Mathematical Logic, 1900–1940*, New York, Oxford University Press.
35- Marion, Mathieu, (1998), *Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics*, Oxford, Clarendon Press.
36- Nolt, John., (1997), *Logics*, New York, Wadsworth Publishing Company.
37- Placek, Tomasz., (1999), *Mathematical Intuitionism and Intersubjectivity: A Critical Exposition of Arguments for Intuitionism*, London, Springer.
38- Shapiro, Stewart, (2005), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, New York, Oxford University Press, Inc.
39- Stigt, Walter. P. van, (1990), *Brouwer's Intuitionism*, North Holland, Elsevier Science Publishers B.V.
40- Wilder, Raymond L., (1965), *Introduction To The Foundations Of Mathematics*, New York, John Wiley & Sons, Inc.

ثالثًا:- المقالات الأجنبية.

1- Franchella, Miriam., (1994), *Heyting's Contribution to the Change in Research into the Foundations of Mathematics*, History and Philosophy of Logic, Volume 15, Issue 2, PP. 149-172.
2- Franchella, Miriam., (1995), *L. E. J. Brouwer- Toward Intuitionistic Logic*, Historia Mathematica, Volume 22, issue 3, PP. 304-322.
3- Franchella, Miriam., (2007), *Arend Heyting and Phenomenology: Is the Meeting Feasible?*, Bulletin d'Analyse Phénoménologique, Volume: 3 , issue: 2, PP. 1-20.
4- Franchella, Miriam., (2018), *Shaping the Enemy: Foundational Labelling by L. E. J. Brouwer and A. Heyting*, History and Philosophy of Logic, PP 1-30.
5- Hansen, Casper Storm., (2015), *Brouwer's Conception of Truth*, Philosophia Mathematica, Issue 3, September 15, PP. 1-23.
6- Heyting, A., (1974), *Intuitionistic Views on the Nature of Mathematics*, Synthese, Vol. 27, No. 1-2, On the Foundations of Mathematics, May - Jun.,PP. 79- 91.
7- Hilbert, David., (1990), *Mathematical Problems*, Translated by Dr. Mary Winston Newson, Bulletin of the American Mathematical Society, Volume: 37, issue: 4, PP. 253-297.
8- Hossack, Keith G., (1990), *A Problem About the Meaning of Intuitionist Negation*, Mind, Vol: 99, Issue: April, PP. 207-219.
9- Kaneko, Hiroshi., (2002), *Brouwer's Conception of Language, Mind and Mathematics*, Annals of the Japan Association for Philosophy of Science, Volume: 11, Issue: 1,PP. 35 - 49.
10- McCarty, Charles., (2006), *At the Heart of Analysis: Intuitionism and Philosophy*, Philosophia Scientiæ, Cahier special: 6, PP. 81 - 94.
11- Raatikainen, Panu., (2004), *Conceptions of Truth in Intuitionism*, History and Philosophy of Logic, Volume: 25, Issue 2: may, PP. 131- 145.
12- Raatikainen, Panu., (2013), *Intuitionistic Logic and Its Philosophy*, Al-Mukhatabat, A Trilingual Journal For Logic, Epistemology and Analytical Philosophy, Issue 6:, PP. 1-15.
13- Weyl, Hermann., (1946), *Mathematics and Logic*, The American Mathematical Monthly, Vol. 53, No. 1, PP. 2-13.

رابعًا: المعاجم والقواميس العربية:

1. لالاند، أندريه، (2001)، *موسوعة لالاند الفلسفية*، تعريب: خليل أحمد خليل، المجلد الأول، بيروت، منشورات عويدات.
2. صليبا، جميل، (1982)، *المعجم الفلسفي بالألفاظ العربية والفرنسية والإنكليزية واللاتينية*، بيروت، دار الكتاب اللبناني.
3. معجم *الرياضيات الصادر عن مجمع اللغة العربية*، (2001)، الجزء الثالث، القاهرة، الهيئة العامة لشئون المطابع الأميرية.
4. *المعجم الفلسفي الصادر عن مجمع اللغة العربية*، (1983)، تصدير د إبراهيم مدكور، القاهرة، الهيئة العامة لشئون المطابع الأميرية.
5. زيادة، معن، (1986)، *الموسوعة الفلسفية العربية*، المجلد الأول: المصطلحات والمفاهيم، بيروت، معهد الإنماء العربي.

The Position of Intuitionistic Logic on the Principles of Traditional Logic

Huda Mohamed Ghazy Ashmawy Hassanein
(PHD) Degree, Department of Philosophical Studies
Faculty of Arts, Ain Shams University - Egypt
Huda.ghazy@art.asu.edu.eg

Prof. Dr. Hussein Ali
Professor of Logic and Philosophy of Science, Department of Philosophical Studies
Faculty of Arts,
Ain Shams University - Egypt
plato_48@yahoo.com

Prof. Dr. Seham El-Nuahy
Professor of Logic and Philosophy of Science, Department of Philosophical Studies, Faculty of Women for Arts, Science & Education
Ain Shams University - Egypt
s_alnoaihi2@yahoo.com

Abstract

This paper deals with the position of intuitionistic logic on the principles of traditional logic. The importance of this logic is due to the fact that it is different from traditional logic, as it expresses the views and ideas of the intuitionism, which be appeared as a result of researching into the problem of the foundations of mathematics. That intuitionistic logic is characterized by the non-existence of the principle of the excluded middle being a theorem of the intuitionistic system .That is due to the different concept of mathematical truth in relation to mathematical Propositions, as the proponents of intuitionistic logic reject the idea that truth is the basis of logic and believe instead in the idea of proof. As a result of replacing the concept of proof with the concept of truth, the difference appeared clearly between traditional logic and intuitionistic logic, especially with regard to the concept of negation and double negation. Traditional negation uses a language that relies on the concepts of truth and false, while the used language in the intuitionistic negation relies on the concepts of probability and refutation. One of the main points of controversy between intuitionistic logic and traditional logic is the absence of the rule of double negation at the proponents of intuitionistic logic.

Keywords: Intuitionistic Logic, Traditional Logic, The Principle of the Excluded Middle, Truth, Proof, Negation.